EXERCICES DE

TRIGONOMÉTRIE

EXERCICE 1.

Niveau : Lycée
Auteur : Dhyne Miguël (18.08.04, miguel.dhyne@win.be)
Mots clés :

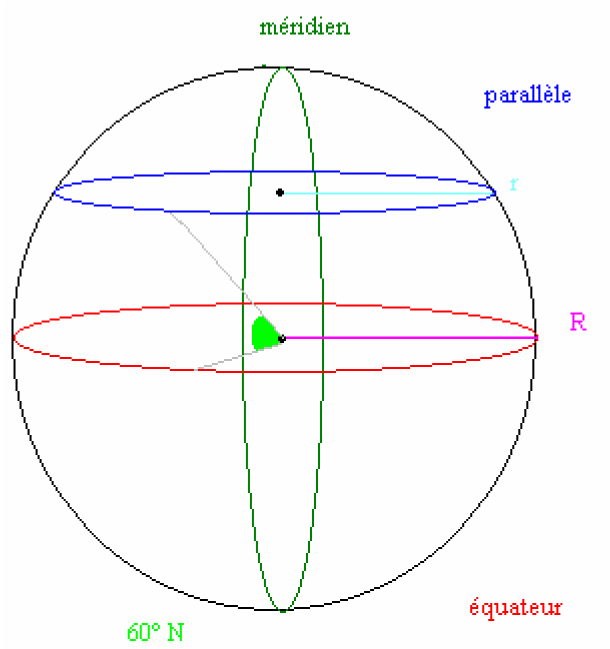
Enoncé :

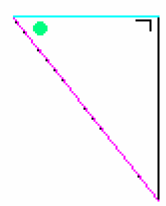
Calculer en $[Km]$ la distance à la surface terrestre qui correspond :

1. à une différence de latitude de $1°$ le long d'un méridien
2. à une différence de $1°$ le long de l'équateur
3. à une différence de longitude de $1°$ le long d'un parallèle à $60°$ de latitude Nord.

On approximera la terre par une sphère parfaite dont la longueur de l'équateur vaut $40'000\,[Km]$.

Solution :





1. Si $360° = 40'000\,[Km]$ Alors $1° = \dfrac{40'000}{360} = 111.11[Km]$

2. Idem que le premier car il s'agit d'une sphère parfaite.

3. $2 \cdot \pi \cdot R = 40'000$ et donc $R = \dfrac{20'000}{\pi}$ or $r = R \cdot \sin(30) = \dfrac{R}{2} = \dfrac{10'000}{\pi}$

   Si $360[°] = 2 \cdot \pi \cdot r = \pi \cdot R$ et donc $1[°] = \dfrac{\pi \cdot}{360} R = 55.55\,[Km]$

EXERCICE 2.

Niveau : Lycée
Auteur : Dhyne Miguël (18.08.04, miguel.dhyne@win.be)

Mots clés :

Enoncé :

Simplifier l'expression ci-dessous :

$$\frac{\sin(\pi-a)\cdot \cot an(\frac{3\pi}{2}-a)\cdot \cos(a-2\pi)}{\tan(\pi+a)\cdot \tan(\frac{\pi}{2}+a)\cdot \cos(\frac{3\pi}{2}+a)}$$

Solution :

Nous savons, grâce au cercle trigonométrique que :

$$\sin(\pi-a)=\sin(a)$$

$$\cot an(\frac{3\pi}{2}-a)=\tan(a)$$

$$\cos(a-2\pi)=\cos(a)$$

$$\tan(\pi+a)=\tan(a)$$

$$\tan(\frac{\pi}{2}+a)=-\tan(a)$$

$$\cos(\frac{3\pi}{2}+a)=\sin(a)$$

Donc l'expression simplifiée une première fois nous donne :

$$\frac{\sin(a)\cdot \tan(a)\cdot cas(a)}{\tan(a)\cdot\left(-\cot an(a)\right)\cdot}\sin(a)$$

Il nous reste a simplifier les termes se trouvant à la fois au numérateur et au dénominateur :

$$\frac{-\cos(a)}{\cot an(a)}$$

Ou encore :

$$-\sin(a)$$

Remarque : Toujours avoir sous la main un cercle trigonométrique afin de remédier facilement aux problèmes d'angles complémentaires, angles correspondants, etc…

EXERCICE 3.

Niveau : Lycée
Auteur : Dhyne Miguël (18.08.04, miguel.dhyne@win.be)
Mots-clés :

Enoncé :

Si $\tan(x)=\dfrac{1}{m}$ et $x\in 2^{\text{e}}$ quadrant. Trouvez les autres nombres trigonométriques.

Solution :

$$\cos^2(x)=\frac{1}{1+\tan^2(x)}=\frac{1}{1+\dfrac{1}{m^2}}=\frac{m^2}{m^2+1} \quad \text{et donc } \cos(a)=\frac{-m}{\sqrt{1+m^2}}$$

$$\sin^2(x)=1-\cos^2(x)=1-\frac{m^2}{1+m^2}=\frac{1}{1+m^2} \quad \text{et donc } \sin(a)=\frac{1}{\sqrt{1+m^2}}$$

Nous avons choisis un cosinus négatif et un sinus positif car l'angle se trouve dans le deuxième quadrant.

EXERCICE 4.

Niveau : Lycée
Auteur : Dhyne Miguël (18.08.04, miguel.dhyne@win.be)
Mots-clés :

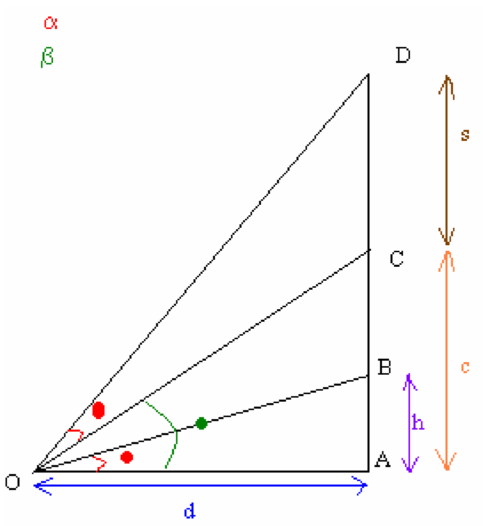
Enoncé :

Un colonne de hauteur c, surmontée d'une statue de hauteur s, s'élève du bord d'une rivière. Un observateur P placé sur l'autre bord voit, sous le même angle, la statue et un soldat de hauteur h placé au pied de la colonne. Exprimer la largeur de la rivière en fonction de c, s et h.

Solution :

Soit d, la largeur de la rivière.

Un dessin vaut mieux qu'un long discours :



$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan(\alpha)+\tan(\beta)}{1-\tan(\alpha)\cdot\tan(\beta)}=\frac{\frac{h}{d}+\frac{c}{d}}{1-\frac{h}{d}\cdot\frac{c}{d}}=\frac{\frac{h+c}{d}}{1-\frac{h\cdot c}{d^2}}$$

Or, nous avons aussi :

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{c+s}{d}$$

Egalons ces deux résultats :

$$\frac{c+s}{d}=\frac{\frac{h+c}{d}}{1-\frac{h\cdot c}{d^2}}$$

$$\frac{c+s}{d}=\frac{h+c}{d}\cdot\frac{d^2}{d^2-h\cdot c}$$

$$\frac{c+s}{d}=d\cdot\frac{h+c}{d^2-h\cdot c}$$

$$(c+s)\cdot(d^2-h\cdot c)=d^2\cdot(h+c)$$

$$d=\sqrt{\frac{(c+s)\cdot h\cdot c}{s-h}}$$

EXERCICE 5.

Niveau : Lycée
Auteur : Dhyne Miguël (23.08.04, miguel.dhyne@win.be)
Mots-clés :

Enoncé :

Vérifier :

$$\frac{\cos(6a)+6\cdot\cos(4a)+15\cdot\cos(2a)+10}{\cos(5a)+5\cdot\cos(3a)+10\cdot\cos(a)}=2\cdot\cos(a)$$

Solution :

$$\frac{[\cos(6a)+\cos(4a)]+[5\cdot\cos(4a)+5\cdot\cos(2a)]+[10\cdot\cos(2a)+10]}{\cos(5a)+5\cdot\cos(3a)+10\cdot\cos(a)}$$

$$\frac{[2\cdot\cos(5a)\cdot\cos(a)]+[5\cdot(2\cdot\cos(3a)\cdot\cos(a))]+[10\cdot(2\cdot\cos^2(a))]}{\cos(5a)+5\cdot\cos(3a)+10\cdot\cos(a)}$$

$$\frac{2\cdot\cos(a)\cdot[\cos(5a)+5\cdot\cos(3a)+10\cdot\cos(a)]}{\cos(5a)+5\cdot\cos(3a)+10\cdot\cos(a)}$$

$$2\cdot\cos(a)\ \text{C.Q.F.D}$$

EXERCICE 6.

Niveau : Lycée
Auteur : Dhyne Miguël (24.08.04, miguel.dhyne@win.be)
Mots-clés :

Enoncé :

Vérifier la relation suivante :

$$Arc\tan(\frac{1}{2}) + Arc\tan(\frac{1}{3}) = \frac{\pi}{4}$$

Solution :

Soit $\alpha = Arc\tan(\frac{1}{2})$ et $\beta = Arc\tan(\frac{1}{3})$

Donc résolvons $\alpha + \beta = \frac{\pi}{4}$:

$$\tan(\alpha + \beta) = \tan(\frac{\pi}{4})$$

$$\frac{\tan(\alpha) + \tan(\beta)}{1 - \tan(\alpha) \cdot \tan(\beta)} = 1$$

$$\frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}} = 1$$

$$\frac{5/6}{5/6} = 1$$

$$1 = 1 \qquad \text{C.Q.F.D.}$$

EXERCICE 7.

Niveau : Lycée
Auteur : Dhyne Miguël (24.08.04, miguel.dhyne@win.be)
Mots-clés :

Enoncé :

Trouver la famille de valeurs x qui satisfait :

$$\sin^2(2x+\frac{\pi}{6}) = \cos^2(x+\frac{\pi}{3})$$

Solution :

Nous avons deux possibilités :

$$\sin(2x+\frac{\pi}{6}) = \cos(x+\frac{\pi}{3})$$

$$\cos(\frac{\pi}{2}-2x-\frac{\pi}{3}) = \cos(x+\frac{\pi}{3})$$

$$\cos(\frac{\pi}{3}-2x) = \cos(x+\frac{\pi}{3})$$

$$\sin(2x+\frac{\pi}{6}) = -\cos(x+\frac{\pi}{3})$$

$$\cos(\frac{\pi}{2}-2x-\frac{\pi}{6}) = \cos(\pi-x-\frac{\pi}{3})$$

$$\cos(\frac{\pi}{3}-2x) = \cos(\frac{2\pi}{3}-x)$$

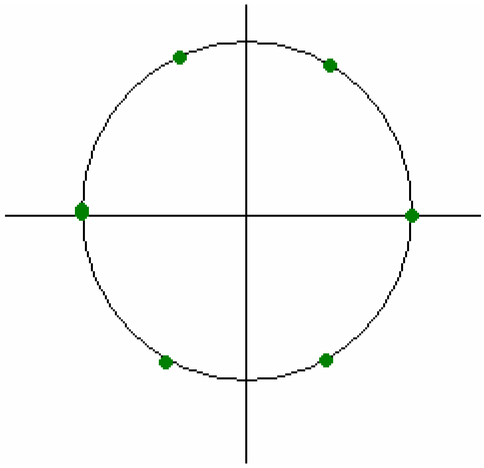
Nous avons pour chaque possibilité, deux solutions possibles :

a) $x = \dfrac{2k\pi}{3}$

b) $x = -\dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi$

a) $x = -\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi$

b) $x = \dfrac{\pi}{3} + \dfrac{2k\pi}{3}$



Il y a donc 6 familles !

EXERCICE 8.

Niveau : Lycée
Auteur : Dhyne Miguël (24.08.04, miguel.dhyne@win.be)
Mots-clés :

Enoncé :

Trouver la famille de valeurs x qui satisfait :

$$\sin(3x)+4\cdot\sin^2(x)-\sin(x)-2=0$$

Solution :

$$4\cdot\sin^2(x)+2\cdot\sin(x)\cdot\cos(2x)-2=0$$

$$2\cdot\sin^2(x)+\sin(x)\cdot\left[1-2\cdot\sin^2(x)\right]-1=0$$

$$-2\cdot\sin^3(x)+2\cdot\sin(x)+\sin(x)-1=0$$

Posons $U=\sin(x)$:

$$-2\cdot U^3+2\cdot U^2+U-1=0$$

$$(U-1)\cdot(-2X^2+1)=0$$

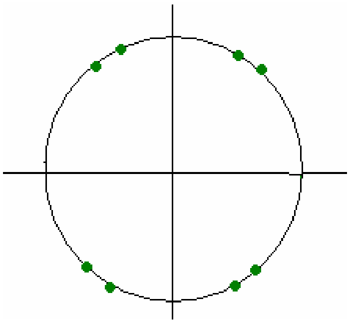
$$U=1 \text{ c.à.d } \sin(x)=1$$

ou

$$U=+-\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ c.à.d } \sin(x)=+-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Et donc :

$$x=\frac{\pi}{2}+2k\pi \text{ ou } x=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}$$



Il y a donc 8 familles !