



EXERCICES DE
TOPOLOGIE

EXERCICE 1.

Niveau : Deuxième Cycle.

Auteur : Ruben Ricchiuto (09.08.04, ruben@sciences.ch)

Mots Clés : Théorème de Baire et cardinal de \mathbb{R}

Énoncé :

Donner une preuve topologique du fait que \mathbb{R} n'est pas dénombrable en utilisant le théorème de Baire rappelé ci-dessous.

Théorème (Baire): Si X est un espace métrique complet ou localement compact, alors pour toute suite de fermés F_n d'intérieurs vides ($F_n^\circ = \emptyset$) nous avons :

$$\left(\bigcup_n F_n \right)^\circ = \emptyset .$$

Solution :

\mathbb{R} est complet (de fait il est aussi localement compact) nous pouvons donc utiliser le théorème de Baire. Supposons \mathbb{R} dénombrable, $\mathbb{R} = \{x_0, x_1, \dots\}$. Nous avons $\mathbb{R} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{x_n\}$ et les singletons sont fermés et d'intérieur vide donc par Baire $\mathbb{R}^\circ = \emptyset$ ce qui est absurde.

EXERCICE 2.

Niveau : Deuxième Cycle

Auteur : Ruben Ricchiuto (09.08.04, ruben@sciences.ch)

Mots Clés : Topologie de Zariski sur \mathbb{R}

Énoncé :

Dans \mathbb{R} , nous considérons la famille $\mathcal{T} = \{A \subseteq \mathbb{R} \mid \mathbb{R} \setminus A \text{ est fini}\} \cup \{\emptyset\} \cup \mathbb{R}$.

1. Démontrer que \mathcal{T} est une topologie (de Zariski).
2. Démontrer que tout ouvert de $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ est un ouvert de \mathbb{R} muni de la topologie usuelle.
3. Démontrer que $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ n'est pas métrisable (il n'existe pas de distance sur \mathbb{R} qui induit la topologie \mathcal{T}).

Solutions :

1. $\emptyset, \mathbb{R} \in \mathcal{T}$. Si $U, V \in \{A \subseteq \mathbb{R} \mid \mathbb{R} \setminus A \text{ est fini}\}$ alors $\mathbb{R} \setminus (U \cap V) = \mathbb{R} \setminus U \cup \mathbb{R} \setminus V$ est fini donc $U \cap V \in \mathcal{T}$. Si $(U_i)_I$ est une famille d'éléments de $\{A \subseteq \mathbb{R} \mid \mathbb{R} \setminus A \text{ est fini}\}$ alors $\mathbb{R} \setminus \bigcup_I U_i = \bigcap_I \mathbb{R} \setminus U_i$ est fini, donc $\bigcup_I U_i \in \mathcal{T}$. Ceci prouve que \mathcal{T} est une topologie sur \mathbb{R} .

2. Si $U \in \{A \subseteq \mathbb{R} \mid \mathbb{R} \setminus A \text{ est fini}\}$ alors $\mathbb{R} \setminus U$ est fini donc fermé dans \mathbb{R} muni de la topologie usuelle.

3. Par suite U est ouvert. $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ n'est pas métrisable car deux ouverts non-vides s'intersectent toujours.

EXERCICE 3.

Niveau : Deuxième Cycle

Auteur : Ruben Ricchiuto (09.08.04, ruben@sciences.ch)

Mots Clés : Topologie compacte-ouverte

Énoncé :

Soit X, Y deux espaces topologiques. Nous définissons $CO(X, Y)$ comme étant l'ensemble des applications continues de $X \rightarrow Y$. Si K est un compact de X et \mathcal{O} un ouvert de Y on note $[K, \mathcal{O}]$ l'ensemble des applications continues $f : X \rightarrow Y$ telles que $f(K) \subseteq \mathcal{O}$. Nous munissons $CO(X, Y)$ de la topologie engendrée par les $[K, \mathcal{O}]$ appelée "compacte-ouverte".

1. Vérifier que si $g : Y \rightarrow Z$ est une application continue alors $CO(X, g) : CO(X, Y) \rightarrow CO(X, Z)$ définie par $\varphi \mapsto g \circ \varphi$ est continue.
2. Démontrer que si X est compact et Y un espace métrique alors la topologie de $CO(X, Y)$ est la topologie de la convergence uniforme.

Solution :

1. Pour montrer que $CO(X, g)$ est continue, il suffit de prouver que l'image réciproque d'un ouvert du type $[K, \mathcal{O}]$ de $CO(X, Z)$ est un ouvert de $CO(X, Y)$. Or $CO(X, g)^{-1}([K, \mathcal{O}]) = \{\varphi \in CO(X, Y) \mid g \circ \varphi \in [K, \mathcal{O}]\} = \{\varphi \in CO(X, Y) \mid g \in [\varphi(K), \mathcal{O}]\} = [K, g^{-1}(\mathcal{O})]$.
2. Nous rappelons que la topologie de la convergence uniforme est induite par la distance δ définie par $\forall f, g \in CO(X, Y), \delta(f, g) = \sup\{d(f(x), g(x)) \mid x \in X\}$ où d est la distance sur Y . Le fait que X soit compact nous assure que $\sup\{d(f(x), g(x)) \mid x \in X\} < +\infty$. Pour répondre à la question, il suffit de montrer que pour tout compact K de X et pour tout ouvert \mathcal{O} de Y , $[K, \mathcal{O}]$ est un ouvert de $(CO(X, Y), \delta)$ et que réciproquement toute boule B ouverte de $(CO(X, Y), \delta)$ est ouverte pour la topologie compacte-ouverte. Soit $f \in [K, \mathcal{O}]$. $f(K)$ est compact et contenu dans \mathcal{O} . Notons $f(K)_r$ l'ensemble des points y de Y tels que $\inf\{d(y, y') \mid y' \in f(K)\} \leq r$. Il existe $\varepsilon > 0$ tel que $f(K)_\varepsilon \subseteq \mathcal{O}$. En effet, \mathcal{O} étant ouvert, pour tout $y \in f(K)$ il existe $r_y > 0$ tel que $B(y, r_y) \subseteq \mathcal{O}$ (où $B(y, r_y)$ est la boule ouverte de rayon r_y centrée en y). $f(K)$ étant compact, il existe un nombre fini y_1, \dots, y_n de points de $f(K)$ tels que $f(K) \subseteq \bigcup_{i=1..n} B(y_i, r_{y_i}/2)$. Posons $\varepsilon = \min\{r_{y_i}/2 \mid i = 1..n\}$, si $y \in f(K)_\varepsilon$ alors il existe $y' \in f(K)$ tel que $d(y, y') \leq \varepsilon$ et il existe $j \in \{1..n\}$ tel que $y' \in B(y_j, r_{y_j}/2)$. Donc $d(y, y_j) \leq d(y, y') + d(y', y_j) < \varepsilon + r_{y_j}/2 \leq r_{y_j}$ et par suite $y \in \mathcal{O}$ car $B(y_j, r_{y_j}) \subseteq \mathcal{O}$.

Ainsi $f(K)_\varepsilon \subseteq \mathcal{O}$. Pour finir, $B(f, \varepsilon) \subseteq [K, \mathcal{O}]$ car
 $g \in B(f, \varepsilon) \Leftrightarrow \delta(f, g) < \varepsilon \Rightarrow \forall x \in X, d(f(x), g(x)) < \varepsilon \Rightarrow \forall x \in K, g(x) \in f(K)_\varepsilon \subseteq \mathcal{O}$
 $\Rightarrow g \in [K, \mathcal{O}]$. Donc $[K, \mathcal{O}]$ est un ouvert de $(CO(X, Y), \delta)$. Montrons à présent que toute boule B ouverte de $(CO(X, Y), \delta)$ est ouverte pour la topologie compacte-ouverte. Soit $f \in B$, alors il existe un $r > 0$ tel que $B(f, r] \subseteq B$ où $B(f, r]$ est la boule fermée de rayon r centrée en f . Pour tout $x \in X$, notons $B_x = B_d(f(x), r/3) \subseteq Y$ et $K_x = \overline{f^{-1}(B_x)}$ (K_x est compact). Pour tout $x \in X$, $x \in f^{-1}(B_x)$ et donc $X = \bigcup_{x \in X} f^{-1}(B_x)$. Les $f^{-1}(B_x)$ étant ouverts, par compacité de X on en déduit,
 $X = \bigcup_{i=1}^n f^{-1}(B_{x_i})$. Posons $U = \bigcap_{i=1}^n [K_{x_i}, \mathcal{O}_{x_i}]$ où $\mathcal{O}_{x_i} = B(f(x_i), r/2)$. U est un ouvert de la topologie compacte-ouverte et $f \in U$ car $f(K_{x_i}) \subseteq \overline{B_{x_i}} \subseteq \mathcal{O}_{x_i}$. De plus si $h \in U$ et $x \in X$, il existe un $1 \leq j \leq n$ tel que $x \in f^{-1}(B_{x_j})$ et par suite $h(x) \in \mathcal{O}_{x_j}$ donc
 $d(h(x), f(x)) \leq d(h(x), f(x_j)) + d(f(x_j), f(x)) \leq r/2 + r/3 < r$. Ceci entraîne que $\delta(h, f) \leq r$ c'est-à-dire $f \in U \subseteq B(f, r] \subseteq B$. Par conséquent, B est un ouvert de la topologie compacte-ouverte.

EXERCICE 4.*Niveau* : Deuxième Cycle*Auteur* : Ruben Ricchiuto (09.08.04, ruben@sciences.ch)*Mots Clés* : Suites et applications continues**Énoncé :**

Soit $(X, d), (Y, \delta)$ deux espaces métriques et $f : X \rightarrow Y$ une application.

1. Démontrer que f est continue sur X ssi pour tout point $x \in X$ et toute suite (x_n) convergeant vers x on a $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x)$.
2. On se propose de démontrer que la propriété 1) n'est plus vérifiée dans des espaces topologiques quelconques. Dans \mathbb{R} on considère la famille suivante $\mathcal{T} = \{U \subseteq \mathbb{R} \mid \mathbb{R} \setminus U \text{ est fini ou dénombrable}\} \cup \{\emptyset\}$. Montrer que \mathcal{T} est une topologie. Soit $id : (\mathbb{R}, \mathcal{T}) \rightarrow (\mathbb{R}, \text{topologie usuelle})$. Montrer que si $x_n \rightarrow x$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ alors $id(x_n) \rightarrow id(x)$ dans $(\mathbb{R}, \text{topologie usuelle})$ mais que id n'est pas continue.

Solutions :

1. Si f est continue pour $\varepsilon > 0$ il existe $\eta > 0$ tel que $d(\tilde{x}, x) \leq \eta \Rightarrow \delta(f(\tilde{x}), f(x)) \leq \varepsilon$ par suite il existe $N > 0$ tel que $n \geq N \Rightarrow \delta(f(x_n), f(x)) \leq \varepsilon$ ce qui veut dire que $f(x_n)$ converge vers $f(x)$. Réciproquement soit $x \in X$ et supposons que pour toute suite (x_n) convergeant vers x on ait $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x)$. Si f n'est pas continue en x , il existe un $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $\eta > 0$ il existe un point $\tilde{x} \in X$ vérifiant $d(\tilde{x}, x) \leq \eta$ et $\delta(f(\tilde{x}), f(x)) > \varepsilon$. Ainsi on peut construire une suite $(x_n)_{\mathbb{N}}$ tendant vers x pour laquelle $\forall n \in \mathbb{N}, \delta(f(x_n), f(x)) > \varepsilon$ (faire tendre η vers 0) ce qui est une contradiction.
2. On considère la famille $\mathcal{T} = \{U \subseteq \mathbb{R} \mid \mathbb{R} \setminus U \text{ est fini ou dénombrable}\} \cup \{\emptyset\}$. On vérifie immédiatement que \mathcal{T} est une topologie. Soit $x \in \mathbb{R}$ et $(x_n)_{\mathbb{N}}$ une suite convergeant vers x dans $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$. Soit $E := \{x_n, n \in \mathbb{N}\} \setminus \{x\}$. E est fini ou vide car sinon $\mathbb{R} \setminus E$ est un ouvert de $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ contenant x et par suite, à partir d'un certain n on aurait $x_n \in \mathbb{R} \setminus E$ ce qui est absurde. Ainsi $(x_n)_{\mathbb{N}}$ est une suite stationnaire et donc converge vers x dans $(\mathbb{R}, \text{topologie usuelle})$. Nous venons de montrer que $id(x_n) \rightarrow id(x)$ dans $(\mathbb{R}, \text{topologie usuelle})$. Il est facile de voir que id n'est pas continue. En effet $]0, +\infty[$ est un ouvert dans $(\mathbb{R}, \text{topologie usuelle})$ mais pas dans $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$.

EXERCICE 5.

Niveau : Deuxième Cycle

Auteur : Ruben Ricchiuto (09.08.04, ruben@sciences.ch)

Mots Clés : Distances

Énoncé :

- Soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction satisfaisant:
 $\forall x, y \in \mathbb{R}_+, f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0, x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$ et $f(x+y) \leq f(x) + f(y)$.
 Montrer que si d est une distance sur un ensemble X alors $f \circ d$ est aussi une distance sur X . Vérifier de plus que ces distances sont équivalentes si f est continue en 0, c'est-à-dire qu'elles induisent la même topologie.
- Montrer que $\sqrt{|x-y|}$ et $\frac{|x-y|}{1+|x-y|}$ définissent des distances sur \mathbb{R} équivalentes à la distance usuelle.

Solution :

- Prouvons que $f \circ d$ est une distance: $f(d(x, y)) = 0 \Leftrightarrow d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$. La symétrie est évidente. Prouvons l'inégalité triangulaire.
 $f(d(x, z)) \leq f(d(x, y) + d(y, z)) \leq f(d(x, y)) + f(d(y, z))$. $f \circ d$ est donc une distance sur X . Supposons f continue en 0. Soit \mathcal{O} un ouvert de (X, d) et soit $x \in \mathcal{O}$. Il existe par hypothèse une boule ouverte de rayon r $B_d(x, r)$ telle que $B_d(x, r) \subseteq \mathcal{O}$. On a $B_{f \circ d}(x, f(r)) \subseteq B_d(x, r) \subseteq \mathcal{O}$. Ce qui prouve que \mathcal{O} est ouvert dans $(X, f \circ d)$. Réciproquement si \mathcal{O} est un ouvert de $(X, f \circ d)$ alors il existe une boule ouverte $B_{f \circ d}(x, r) \subseteq \mathcal{O}$ pour $x \in \mathcal{O}$. f continue en 0 entraîne: $\exists \delta > 0$ tel que $d(x, y) < \delta \Rightarrow f(d(x, y)) < r$. Donc $B_d(x, \delta) \subseteq B_{f \circ d}(x, r) \subseteq \mathcal{O}$ et \mathcal{O} est un ouvert de (X, d) .
- Il suffit de prendre $f(x) = \sqrt{x}$, $f(x) = \frac{x}{1+x}$ et de vérifier les conditions de 1. Les deux premières sont évidentes, vérifions la dernière.
 $x + y \leq x + y + 2\sqrt{x \cdot y} = (\sqrt{x} + \sqrt{y})^2 \Rightarrow \sqrt{x+y} \leq \sqrt{x} + \sqrt{y}$.
 $\frac{x+y}{1+x+y} \leq \frac{x}{1+x} + \frac{y}{1+y} \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow -xy \cdot (x+y) \leq 2xy$ et cette dernière inégalité est évidente car $x, y \geq 0$.

EXERCICE 6.*Niveau* : Deuxième Cycle*Auteur* : Ruben Ricchiuto (09.08.04, ruben@sciences.ch)*Mots Clés* : Complétude et invariance topologique**Énoncé :**

Cet exercice se propose de montrer que la notion d'espace métrique complet n'est pas topologique. Plus précisément, deux espaces métriques homéomorphes ne sont pas toujours simultanément complets ou non complets.

On considère l'espace $X =]0, +\infty[$. On munit X des distances $d(x, y) = |x - y|$ et $\delta(x, y) = |\ln(x) - \ln(y)|$. Démontrer que (X, d) et (X, δ) sont homéomorphes, que (X, δ) est complet et que (X, d) ne l'est pas.

Solution :

$\ln : X \rightarrow \mathbb{R}$ est une isométrie surjective (d'inverse $\exp : \mathbb{R} \rightarrow X$) entre (X, δ) et (\mathbb{R}, d) . En effet $d(\ln x, \ln y) = |\ln x - \ln y| = \delta(x, y)$. Les espaces (X, δ) et (\mathbb{R}, d) sont donc homéomorphes. De plus, étant donné que (\mathbb{R}, d) est homéomorphe à (X, d) (prendre $\exp : (\mathbb{R}, d) \rightarrow (X, d)$), (X, δ) est homéomorphe à (X, d) . (X, d) n'est pas complet car la suite $(1/n)_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}}$ tend vers 0 dans (\mathbb{R}, d) et par conséquent est de Cauchy dans (\mathbb{R}, d) , ce qui entraîne qu'elle est aussi de Cauchy dans l'espace induit (X, d) , mais ne converge pas dans cet espace. Montrons que (X, δ) est complet. Soit (x_n) une suite de Cauchy dans (X, δ) . On a $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$, tel que $n, m \geq N \Rightarrow \delta(x_n, x_m) \leq \varepsilon$ c'est-à-dire $|\ln x_n - \ln x_m| \leq \varepsilon$. Ainsi $\ln x_n$ est une suite de Cauchy dans (\mathbb{R}, d) et par suite elle converge vers $y \in \mathbb{R}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln x_n = y$. $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers e^y dans (X, δ) en effet $\delta(x_n, e^y) = |\ln x_n - y| \rightarrow 0$.

EXERCICE 7.

Niveau : Deuxième Cycle

Auteur : Ruben Ricchiuto (09.08.04, ruben@sciences.ch)

Mots Clés : Sous-groupes additifs de \mathbb{R}

Énoncé :

1. Montrer que si $G \subseteq \mathbb{R}$ est un sous-groupe additif de \mathbb{R} alors ou bien G est dense ou bien il existe $\xi \in \mathbb{R}$ tel que $G = \{n \cdot \xi \mid n \in \mathbb{Z}\} = \xi\mathbb{Z}$.
2. Dédurre de 1. que si $G = \{n \cdot \alpha + m \cdot \beta \mid n, m \in \mathbb{Z}\} = \alpha \cdot \mathbb{Z} + \beta \cdot \mathbb{Z}$ avec $\alpha \cdot \beta \neq 0$ alors G est dense ssi $\frac{\alpha}{\beta} \notin \mathbb{Q}$.
3. Sous quelle condition portant sur θ et π le groupe multiplicatif $G = \{\exp(in\theta) \mid n \in \mathbb{Z}\}$ est dense dans S^1 ?
4. Dédurre de 3. que $\{\sin(n) \mid n \in \mathbb{Z}\}$ est dense dans $[-1, 1]$.
5. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow X$ continue (où X est un espace topologique). Montrer que $G := \{T \in \mathbb{R} \mid \forall x \in \mathbb{R}, f(x+T) = f(x)\}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$. Que peut-on dire de f lorsque X est séparé et G est dense?

Solution :

1. Soit $\xi = \inf \{x \in G \mid x > 0\}$. Nous avons deux possibilités, ou bien $\xi = 0$ ou bien $\xi > 0$. Dans le premier cas G est dense dans \mathbb{R} , en effet soit $y \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$. Il existe $x \in G, x > 0$ tel que $x \leq \varepsilon$ et donc $|y - nx| < \varepsilon$ pour un certain $n \in \mathbb{Z}$. Comme $nx \in G$ on a $y \in \overline{G}$ (où \overline{G} est l'adhérence de G). Si $\xi > 0$ alors $\xi \in G$ autrement il existe une suite strictement décroissante $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de G qui tend vers ξ et la différence $x_n - x_{n+1} \in G \setminus \{0\}$ tend vers zéro, donc $\xi = \inf \{x \in G \mid x > 0\} = 0$ ce qui est une contradiction. Soit à présent $y \in G$, il existe un entier $n \in \mathbb{Z}$ et un nombre réel $r \in [0, \xi[$ tel que $y = n \cdot \xi + r$. Mais $r = y - n \cdot \xi \in G$ donc par minimalité de ξ on a $r = 0$ et $y = n \cdot \xi$. Ainsi $G = \{n \cdot \xi \mid n \in \mathbb{Z}\}$.
2. Si G n'est pas dense alors il existe $\xi \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tel que $G = \xi \cdot \mathbb{Z}$. Par suite, il existe deux entiers non nuls $n, m \in \mathbb{Z}$ tels que $\alpha = n \cdot \xi$ et $\beta = m \cdot \xi$. Donc $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{n}{m} \in \mathbb{Q}$.
Réciproquement si $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ avec $p, q \in \mathbb{Z}$ deux entiers premiers entre eux alors,

$$n \cdot \alpha + m \cdot \beta = \beta \left(\frac{\alpha}{\beta} n + m \right) = \beta \left(\frac{p}{q} n + m \right) = \frac{\beta}{q} (pn + qm). \text{ Etant donné que}$$

$$\{pn + qm \mid n, m \in \mathbb{Z}\} = \mathbb{Z}, \text{ on a } G = \frac{\beta}{q} \mathbb{Z} \text{ et } G \text{ n'est pas dense.}$$

3. Considérons le morphisme de groupes topologiques $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow S^1, t \mapsto \exp(i \cdot t)$. G est dense dans S^1 ssi $\varphi^{-1}(G)$ est dense dans \mathbb{R} (découle du fait que φ est surjective et ouverte). Or $\varphi^{-1}(G) = \theta \cdot \mathbb{Z} + 2\pi \cdot \mathbb{Z}$ donc par le point 2. G est dense dans S^1 ssi $\theta/2\pi \notin \mathbb{Q}$.
4. Considérons la projection sur l'axe des ordonnées $p: S^1 \rightarrow [-1, 1]$. Par 3. $G = \{\exp(in) \mid n \in \mathbb{Z}\}$ est dense dans S^1 (car π est irrationnel) donc $p(G) = \{\sin(n) \mid n \in \mathbb{Z}\}$ est dense dans $[-1, 1]$.
5. Il est évident que $G = \{T \in \mathbb{R} \mid \forall x \in \mathbb{R}, f(x+T) = f(x)\}$ est un sous-groupe additif de \mathbb{R} . f est constante sur G en effet, pour tout $T_1, T_2 \in G$, $f(T_1 + T_2) = f(T_1) = f(T_2)$. Si G est dense dans \mathbb{R} alors $f(G)$ est dense dans $f(\mathbb{R})$, mais étant donné que $f(G)$ est un singleton et que X est séparé on en déduit que $f(\mathbb{R}) = f(G)$ et donc que f est constante.

EXERCICE 8.

Niveau : Deuxième Cycle

Auteur : Ruben Ricchiuto (09.08.04, ruben@sciences.ch)

Mots Clés : Applications continues

Énoncé :

Soient X, Y_1, \dots, Y_n des espaces topologiques et $f : X \rightarrow Y_1 \times \dots \times Y_n$ une application. Notons $p_i : Y_1 \times \dots \times Y_n \rightarrow Y_i, 1 \leq i \leq n$ la i -ème projection. Montrer que f est continue ssi $p_i \circ f$ est continue pour tout $1 \leq i \leq n$.

Solution :

Les p_i sont des applications continues. Par suite si f est continue $p_i \circ f$ l'est aussi.

Réciproquement, si les $p_i \circ f$ sont continues alors pour $\mathcal{O}_1 \times \dots \times \mathcal{O}_n$ ouvert de $Y_1 \times \dots \times Y_n$,

$f^{-1}(\mathcal{O}_1 \times \dots \times \mathcal{O}_n) = (p_1 \circ f)^{-1}(\mathcal{O}_1) \cap \dots \cap (p_n \circ f)^{-1}(\mathcal{O}_n)$ est un ouvert. Par suite, pour tout ouvert \mathcal{O} de $Y_1 \times \dots \times Y_n$, $f^{-1}(\mathcal{O})$ est un ouvert de X .

EXERCICE 9.*Niveau* : Deuxième Cycle*Auteur* : Ruben Ricchiuto (09.08.04, ruben@sciences.ch)*Mots Clés* : Suites, systèmes fondamentaux de voisinages**Énoncé :**

1. Soit X un espace topologique et $A \subseteq X$. Montrer que si $(a_n)_{\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de A qui tend vers x lorsque $n \rightarrow +\infty$ alors $x \in \bar{A}$ où \bar{A} est l'adhérence de A .
2. Montrer qu'en général la réciproque de 1. est fautive. [Indication : considérer l'espace $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ où les ouverts de \mathcal{T} sont \emptyset et les sous-ensembles de \mathbb{R} dont le complémentaire est fini ou dénombrable.]
3. Avec les mêmes notations que 1. on suppose que $x \in X$ possède un système fondamental dénombrable de voisinages. Montrer que dans ce cas on a l'équivalence : il existe une suite d'éléments de A qui tend vers $x \Leftrightarrow x \in \bar{A}$. [On rappelle qu'un système fondamental de voisinages de x est une famille $(U_i)_I$ de voisinages de x telle que pour tout V voisinage de x il existe $i \in I$ avec $U_i \subseteq V$.]
4. On suppose que \mathcal{T}, \mathcal{F} sont deux topologies sur X vérifiant, pour toute suite $(x_n)_{\mathbb{N}}$ et tout point x , $(x_n)_{\mathbb{N}} \rightarrow x$ pour \mathcal{T} ssi $(x_n)_{\mathbb{N}} \rightarrow x$ pour \mathcal{F} . On suppose de plus que pour tout $x \in X$ il existe un système fondamental dénombrable de voisinages pour \mathcal{T} et un système fondamental dénombrable de voisinages pour \mathcal{F} . Montrer que $\mathcal{T} = \mathcal{F}$.

Solution :

1. Soit \mathcal{O} un ouvert contenant x . Etant donné que $(a_n)_{\mathbb{N}}$ tend vers x , il existe un entier N tel que $n \geq N \Rightarrow a_n \in \mathcal{O}$. Par suite $\mathcal{O} \cap A \neq \emptyset$. Donc $x \in \bar{A}$.
2. Considérons l'espace topologique $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ où les ouverts de \mathcal{T} sont \emptyset et les sous-ensembles de \mathbb{R} dont le complémentaire est fini ou dénombrable. Dans cet espace les suites convergentes sont les suites stationnaires. Si $A = [0,1]$ et $x = 2$, il n'existe aucune suite de A qui converge vers x . Néanmoins, $x \in \bar{A}$. En effet si \mathcal{O} est un voisinage ouvert de x , $\mathbb{R} \setminus \mathcal{O}$ est fini ou dénombrable et donc $A \not\subseteq \mathbb{R} \setminus \mathcal{O}$ c'est-à-dire $A \cap \mathcal{O} \neq \emptyset$. De fait, $\bar{A} = \mathbb{R}$.
3. Il suffit de montrer l'implication \Leftarrow . Soit $(U_i)_{\mathbb{N}}$ un système fondamental de voisinages de x . On considère les voisinages $V_i = \bigcap_{j=0}^i U_j$. $V_i \cap A \neq \emptyset$ car $x \in \bar{A}$. Soit pour tout entier i , $a_i \in V_i \cap A$. La suite $(a_i)_{\mathbb{N}}$ obtenue converge vers x . En effet si \mathcal{O}

est un voisinage ouvert de x alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $U_N \subseteq \mathcal{O}$. Par suite, pour tout $n \geq N$, $a_n \in \mathcal{O}$.

4. Soit $A \subseteq X$ un fermé de \mathcal{T} . Si $x \in \overline{A}^{\mathcal{F}}$, (on note $\overline{A}^{\mathcal{F}}$ l'adhérence de A pour \mathcal{F}) il existe une suite $(a_n)_{\mathbb{N}}$ de A qui tend vers x pour \mathcal{F} donc aussi pour \mathcal{T} donc $x \in \overline{A}^{\mathcal{T}} = A$ et $\overline{A}^{\mathcal{F}} = A$. C'est-à-dire A est fermé pour \mathcal{F} . Le même raisonnement montre que les fermés de \mathcal{F} sont des fermés de \mathcal{T} . Ainsi $\mathcal{T} = \mathcal{F}$.

EXERCICE 10.*Niveau* : Deuxième Cycle*Auteur* : Ruben Ricchiuto (09.08.04, ruben@sciences.ch)*Mots Clés* : Applications continues et adhérence**Énoncé :**

Soit X, Y deux espaces topologique, $A \subseteq X$ et $f : X \rightarrow Y$ une application continue.

1. Montrer que $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$ mais qu'en général $f(\overline{A}) \neq \overline{f(A)}$
2. On suppose que Y est séparé et que $A \subseteq B \subseteq X$ avec B compact. Montrer que dans ce cas $f(\overline{A}) = \overline{f(A)}$.

Solution :

1. Soit $y \in f(\overline{A})$ et \mathcal{O} un voisinage ouvert de y . Il faut montrer que $\mathcal{O} \cap f(A) \neq \emptyset$. Il existe $x \in \overline{A}$ tel que $y = f(x)$. $x \in f^{-1}(\mathcal{O})$, donc $f^{-1}(\mathcal{O}) \cap A \neq \emptyset$. Soit $x' \in f^{-1}(\mathcal{O}) \cap A$ alors $f(x') \in \mathcal{O} \cap f(A)$ et par suite $y \in \overline{f(A)}$. En général, l'inclusion $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$ est stricte, en effet si $X =]0, +\infty[$, $Y = \mathbb{R}$ et $f(x) = 1/x$ alors $f(\overline{[1, +\infty[}) = f([1, +\infty[) =]0, 1]$ est contenu mais pas égal à $\overline{f([1, +\infty[)} = \overline{]0, 1]}$.
2. $A \subseteq B$ entraîne \overline{A} compact (car fermé dans un compact). Par suite, $f(\overline{A})$ est compact (car image d'un compact par une application continue dans un séparé). Donc $f(\overline{A})$ est fermé (car compact dans un séparé). Or par 1. on sait que $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$ et $\overline{f(A)}$ est le plus petit fermé contenant $f(A)$ donc $f(\overline{A}) = \overline{f(A)}$.

EXERCICE 11.

Niveau : Deuxième Cycle

Auteur : Ruben Ricchiuto (01.04.05, ruben@sciences.ch)

Mots Clés : Sous-espaces ouverts, fermés et connexe par arcs de $M(n, \mathbb{C})$

Énoncé :

1. Montrer que $GL(n, \mathbb{C})$ est un ouvert de $M(n, \mathbb{C})$ (où $M(n, \mathbb{C})$ est l'espace des matrices carrées $n \times n$ à coefficients dans \mathbb{C} et $GL(n, \mathbb{C})$ le sous-espace des matrices inversibles).
2. Montrer que $U(n, \mathbb{C})$ et $SU(n, \mathbb{C})$ sont fermés dans $M(n, \mathbb{C})$ (on rappelle que $U(n, \mathbb{C})$ est le sous-espace des matrices unitaires c'est-à-dire telles que $A \cdot A^* = I$ et $SU(n, \mathbb{C})$ le sous-espace des matrices unitaires qui en plus vérifient $\det(A) = 1$).
3. Montrer que $U(n, \mathbb{C})$ et $SU(n, \mathbb{C})$ sont compacts. [Indication : l'application $A \mapsto \sqrt{\text{Tr}(A \cdot A^*)}$ est une norme sur $M(n, \mathbb{C})$ et $U(n, \mathbb{C})$ est borné].
4. Montrer que $U(n, \mathbb{C})$ et $SU(n, \mathbb{C})$ sont connexes par arcs. [Indication: par le théorème spectral on sait que toute matrice unitaire est diagonalisable, de plus toutes les valeurs propres sont de module 1].

Solution :

1. L'application $\det : M(n, \mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$ est continue et $GL(n, \mathbb{C})$ est ouvert car $GL(n, \mathbb{C}) = \det^{-1}(\mathbb{C}^*)$ et \mathbb{C}^* est ouvert.
2. Considérons les applications suivantes :
 $\varphi : M(n, \mathbb{C}) \times M(n, \mathbb{C}) \rightarrow M(n, \mathbb{C}), (A, B) \mapsto A \cdot B$, $\psi : M(n, \mathbb{C}) \rightarrow M(n, \mathbb{C}), A \mapsto A^*$ et
 $id \times \psi : M(n, \mathbb{C}) \rightarrow M(n, \mathbb{C}) \times M(n, \mathbb{C}), A \mapsto (A, A^*)$. On vérifie facilement que ces applications sont continues. Ainsi l'application $\alpha = \varphi \circ (id \times \psi)$ est continue et
 $U(n, \mathbb{C}) = \alpha^{-1}(I)$ est fermé car $\{I\}$ est fermé dans $M(n, \mathbb{C})$. De plus,
 $SU(n, \mathbb{C}) = \det^{-1}(1) \cap U(n, \mathbb{C})$. Donc $SU(n, \mathbb{C})$ est lui aussi fermé.
3. L'application $\beta : M(n, \mathbb{C}) \times M(n, \mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}, (A, B) \mapsto \text{Tr}(A \cdot B^*)$ est un produit scalaire sur $M(n, \mathbb{C})$. En effet, $\beta(A, A) = \text{Tr}(AA^*) = \sum_{i=1}^n |a_i|^2 \geq 0$ où a_i est le i -ème vecteur ligne de A et $\beta(A, A) = 0 \Leftrightarrow A = 0$. Le reste est facile à vérifier. Il s'ensuit que
 $A \mapsto \sqrt{\text{Tr}(A \cdot A^*)}$ est une norme sur $M(n, \mathbb{C})$. Or pour tout $A \in U(n, \mathbb{C})$,
 $\|A\| = \sqrt{\text{Tr}(A \cdot A^*)} = \sqrt{n}$ donc $U(n, \mathbb{C})$ est borné et fermé (par 2.), par suite il est compact. $SU(n, \mathbb{C}) \subseteq U(n, \mathbb{C}) \Rightarrow SU(n, \mathbb{C})$ est compact aussi.

4. Les valeurs propres de $A \in U(n, \mathbb{C})$ sont de module un car

$$Ax = \lambda x \Rightarrow |\lambda|^2 \|x\|^2 = \|Ax\|^2 = \langle Ax | Ax \rangle = \langle x | A^* Ax \rangle = \langle x | x \rangle = \|x\|^2. \text{ Par le théorème}$$

spectral il existe une matrice $S \in U(n, \mathbb{C})$ telle que $SAS^{-1} = \begin{pmatrix} e^{i\alpha_1} & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & e^{i\alpha_n} \end{pmatrix}$. Soit

$\gamma : [0, 1] \rightarrow M(n, \mathbb{C})$ l'application continue définie par $\gamma(t) = \begin{pmatrix} e^{it\alpha_1} & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & e^{it\alpha_n} \end{pmatrix}$. Alors

$S^{-1}\gamma S$ est un arc reliant I et A . Ainsi tout élément de $U(n, \mathbb{C})$ est relié par un arc à I . Donc $U(n, \mathbb{C})$ est connexe par arcs. Pour $SU(n, \mathbb{C})$ l'argument est le même à ceci près : pour que l'arc reste dans $SU(n, \mathbb{C})$ il faut choisir les α_i de telle sorte que

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i = 0. \text{ Ceci est toujours possible vu que } \alpha_i \text{ est défini à } 2\pi \text{ près.}$$

EXERCICE 12.

Niveau : Deuxième Cycle

Auteur : Ruben Ricchiuto (01.03.05, ruben@sciences.ch)

Mots Clés : Compactifié d'Alexandroff

Énoncé :

Nous rappelons que le compactifié d'Alexandroff d'un espace topologique localement compact X est l'espace $\widehat{X} = X \cup \{\infty\}$ muni de la topologie définie par, U ouvert de \widehat{X} ssi

$$\begin{cases} U \text{ ouvert de } X \text{ si } \infty \notin U \\ \widehat{X} \setminus U \text{ compact de } X \text{ si } \infty \in U \end{cases} . \widehat{X} \text{ muni de cette topologie, est compact.}$$

1. Montrer que si X est compact alors $\widehat{X \setminus \{x\}} \simeq X$.
2. Montrer que $\widehat{\mathbb{R}^n} \simeq S^n$ où S^n est la sphère unité de \mathbb{R}^{n+1} [Indication : utiliser la projection stéréographique pour montrer que $S^n \setminus \{x\} \simeq \mathbb{R}^n$].

Solution :

1. Commençons par remarquer que $X \setminus \{x\}$ est localement compact. En effet si $y \in X \setminus \{x\}$, il existe un voisinage ouvert V de y dans X ne contenant pas x (X est séparé). Par suite, il existe un voisinage compact de y contenu dans V (X est compact donc localement compact). Considérons à présent l'application $f : \widehat{X \setminus \{x\}} \rightarrow X$ où f est l'identité sur $X \setminus \{x\}$ et $f(\infty) = x$. f est continue car soit U un ouvert de X , si $x \notin U$, alors U est un ouvert de $X \setminus \{x\}$ et par conséquent $f^{-1}(U) = U$ est un ouvert de $\widehat{X \setminus \{x\}}$. Si $x \in U$, $\infty \in f^{-1}(U)$ et $\widehat{X \setminus \{x\}} \setminus f^{-1}(U) = X \setminus U$ est compact (car fermé dans un compact). Donc $f^{-1}(U)$ est ouvert dans $\widehat{X \setminus \{x\}}$ et f est continue. f est une application ouverte, en effet si \mathcal{O} est un ouvert de $\widehat{X \setminus \{x\}}$ alors ou bien $\infty \notin \mathcal{O}$ et dans ce cas $f(\mathcal{O}) = \mathcal{O}$ est un ouvert de $X \setminus \{x\}$ et donc de X , ou bien $\infty \in \mathcal{O}$ et $\widehat{X \setminus \{x\}} \setminus \mathcal{O} = X \setminus f(\mathcal{O})$ est compact et donc $f(\mathcal{O})$ est ouvert dans X . f étant bijective, ce que nous venons de montrer, entraîne donc que f est un homéomorphisme.

2. Soit S^n la sphère unité dans \mathbb{R}^{n+1} . On considère la projection stéréographique $\varphi : S^n \setminus \{e_{n+1}\} \rightarrow \mathbb{R}^n$ (avec e_i les vecteurs de la base canonique) définie par

$$\varphi(x) = \left(\frac{x_1}{1-x_{n+1}}, \dots, \frac{x_n}{1-x_{n+1}} \right). \text{ Géométriquement, } \varphi(x) \text{ représente l'intersection de la}$$

droite passant par e_{n+1} et x avec le plan d'équation $x_{n+1} = 0$ qu'on identifie à \mathbb{R}^n . Il est évident que φ est une application continue et en fait que c'est un homéomorphisme

$$\text{car on vérifie facilement que } \psi : \mathbb{R}^n \rightarrow S^n \setminus \{e_{n+1}\}, y \mapsto \left(\frac{2y_1}{1+\|y\|^2}, \dots, \frac{2y_n}{1+\|y\|^2}, \frac{\|y\|^2-1}{\|y\|^2+1} \right)$$

est l'application réciproque de φ . Ainsi $S^n \setminus \{e_{n+1}\} \simeq \mathbb{R}^n$ et donc $\widehat{S^n \setminus \{e_{n+1}\}} \simeq \widehat{\mathbb{R}^n}$. Or par 1. nous avons, $\widehat{S^n \setminus \{e_{n+1}\}} \simeq S^n$ et par suite $\widehat{\mathbb{R}^n} \simeq S^n$.

EXERCICE 13.

Niveau : Deuxième Cycle

Auteur : Ruben Ricchiuto (01.03.05, ruben@sciences.ch)

Mots Clés : Connexité de $SO(n, \mathbb{R})$ et $O(n, \mathbb{R})$ **Énoncé :**

1. Montrer que $SO(n, \mathbb{R})$ est connexe par arcs [Indication : utiliser le fait que pour toute matrice $A \in SO(n, \mathbb{R})$, il existe une matrice $S \in O(n, \mathbb{R})$ telle que

$$SAS^{-1} = \begin{pmatrix} m_1 & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & m_n \end{pmatrix} \text{ où } m_i = 1 \text{ ou } m_i = \begin{pmatrix} \cos \alpha_i & -\sin \alpha_i \\ \sin \alpha_i & \cos \alpha_i \end{pmatrix}.$$

2. Dédurre de 1. que $O(n, \mathbb{R})$ a deux composantes connexes.

Rappel : $O(n, \mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices $n \times n$ à coefficients réels vérifiant $MM^t = I$ et $SO(n, \mathbb{R})$ est le sous-ensemble de $O(n, \mathbb{R})$ formé des matrices de déterminant 1.

Solution :

1. Si $A \in SO(n, \mathbb{R})$ alors par l'indication, il existe une matrice $S \in O(n, \mathbb{R})$ telle que

$$SAS^{-1} = \begin{pmatrix} m_1 & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & m_n \end{pmatrix} \text{ où } m_i = 1 \text{ ou } m_i = \begin{pmatrix} \cos \alpha_i & -\sin \alpha_i \\ \sin \alpha_i & \cos \alpha_i \end{pmatrix}. \text{ On considère}$$

$$\gamma : [0, 1] \rightarrow SO(n, \mathbb{R}) \text{ définie par } \forall t \in [0, 1], \gamma(t) = \begin{pmatrix} m_1(t) & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & m_n(t) \end{pmatrix} \text{ avec } m_i(t) = 1 \text{ si}$$

$$m_i = 1 \text{ et } m_i(t) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha_i t) & -\sin(\alpha_i t) \\ \sin(\alpha_i t) & \cos(\alpha_i t) \end{pmatrix} \text{ si } m_i = \begin{pmatrix} \cos \alpha_i & -\sin \alpha_i \\ \sin \alpha_i & \cos \alpha_i \end{pmatrix}. \text{ On remarque que}$$

$\gamma(0) = I$ et $\gamma(1) = SAS^{-1}$ par suite, $S^{-1}\gamma S$ est un arc reliant I et A dans $SO(n, \mathbb{R})$.

Ainsi tout élément de $SO(n, \mathbb{R})$ est relié par un arc à I . Donc $SO(n, \mathbb{R})$ est connexe par arcs.

2. Considérons l'application continue $\det : O(n, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$. Etant donné que pour toute matrice $A \in O(n, \mathbb{R})$, $\det(A) = \pm 1$, l'application \det prend ses valeurs dans l'espace discret $\{-1, 1\}$. Etant donné que toute application continue dans un espace discret est constante sur les composantes connexes et que $SO(n, \mathbb{R})$ est connexe par 1, $\det^{-1}(1) = SO(n, \mathbb{R})$ est une composante connexe. De plus, l'ensemble des matrices appartenant à $O(n, \mathbb{R})$ de déterminant -1 est connexe par arcs comme $SO(n, \mathbb{R})$ (en effet l'application qui consiste à permuter les deux premières colonnes d'une matrice

de $SO(n, \mathbb{R})$ est un homéomorphisme de $SO(n, \mathbb{R})$ dans $\det^{-1}(-1)$ donc $\det^{-1}(-1)$ est aussi une composante connexe. Pour finir, nous avons l'union disjointe $O(n, \mathbb{R}) = \det^{-1}(1) \cup \det^{-1}(-1)$ ce qui montre que $O(n, \mathbb{R})$ a deux composantes connexes.

EXERCICE 14.

Niveau : Deuxième Cycle

Auteur : Ruben Ricchiuto (01.03.05, ruben@sciences.ch)

Mots Clés : Fermés, compacts de \mathbb{R}^n

Énoncé :

Pour $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ on note $A + B = \{a + b \mid (a, b) \in A \times B\}$.

1. Montrer que A et B fermés n'implique pas $A + B$ fermé.
2. Montrer que si A est fermé et B compact alors $A + B$ est fermé.

Solution :

1. Dans \mathbb{R}^2 , si $A = \{(x, 1/x) \mid x \geq 1\}$ et $B = \mathbb{R} \times \{0\}$ alors A et B sont fermés mais $A + B = \mathbb{R} \times]0, 1]$ ne l'est pas.
2. Soit $y \in \overline{A + B}$. Alors, il existe deux suites $(a_n)_{\mathbb{N}}, (b_n)_{\mathbb{N}}$ avec $a_n \in A, b_n \in B$ telles que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n + b_n = y$. Quitte à considérer une sous-suite, on peut supposer que la suite $(b_n)_{\mathbb{N}}$ converge (B est compact). Ainsi, la suite $(a_n)_{\mathbb{N}}$ converge aussi et $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \in A$ car A est fermé. Si on note $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ et $b = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ alors $y = a + b \in A + B$. Ce qui prouve que $A + B$ est fermé.

EXERCICE 15.*Niveau* : Deuxième Cycle*Auteur* : Ruben Ricchiuto (01.03.05, ruben@sciences.ch)*Mots Clés* : Séparabilité**Énoncé :**Soit X un espace topologique.

1. Montrer que si X est à base dénombrable alors X est séparable.
2. Montrer que la réciproque est fautive. [Indication : considérer l'espace topologique $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ où $\mathcal{T} = \{\mathcal{O} \subseteq \mathbb{R} \mid \mathbb{R} \setminus \mathcal{O} \text{ est fini}\} \cup \{\emptyset, \mathbb{R}\}$.]
3. Montrer que si X est un espace métrique alors nous avons: X est à base dénombrable $\Leftrightarrow X$ est séparable.

Solution :

1. Soit $(U_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une base de X . Pour chaque $i \in \mathbb{N}$ nous choisissons $a_i \in U_i$. L'ensemble $\{a_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ ainsi obtenu est dense. En effet si \mathcal{O} est un ouvert de X , il existe $j \in \mathbb{N}$ tel que $U_j \subseteq \mathcal{O}$ et par suite, $a_j \in \mathcal{O}$.
2. L'espace $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ de l'indication est séparable, en effet tout sous-ensemble dénombrable de \mathbb{R} est dense (par exemple \mathbb{Z} est dense). Par contre, il ne possède pas de base dénombrable, car si $(U_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est une telle base l'ensemble $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} U_i$ est non vide et on peut donc choisir un $x \in \bigcap_{i \in \mathbb{N}} U_i$. L'ensemble $\mathbb{R} \setminus \{x\}$ est par conséquent ouvert mais ne peut pas s'exprimer comme union d'ensembles U_i .
3. Il ne reste qu'à montrer la partie \Leftarrow de l'équivalence. Soit donc $\{x_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ une partie dense de X . L'ensemble de boules $B(x_i, 1/n)$ avec $(i, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$ est dénombrable et constitue une base. En effet, si \mathcal{O} est un ouvert de X alors pour tout $x \in \mathcal{O}$ il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $B(x, 1/n) \subseteq \mathcal{O}$. $\{x_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ étant dense, il existe $i \in \mathbb{N}$ tel que $x_i \in B(x, 1/2n)$ par suite, $x \in B(x_i, 1/2n) \subseteq \mathcal{O}$. Ce qui montre que \mathcal{O} est réunion de boules du type $B(x_i, 1/n)$.