



EXERCICES DE  
**LOGIQUE ET THÉORIE DE LA  
DÉMONSTRATION**

**EXERCICE 1.**

*Niveau* : Lycée

*Auteur* : Vincent Isoz (18.09.04, isoz@sciences.ch )

*Mots-clés* : logique

---

**Énoncé :**

Alice, Bob et Carole sont pris en flagrant délit par leurs parents après avoir brisé l'aquarium du salon. Chacun des enfants se justifie en argumentant :

Alice : "Carole a cassé l'aquarium et Bob n'a rien fait"

Bob : "Je suis innocent et l'une au moins des 2 filles a touché à l'aquarium"

Carole : "Si Alice a touché à l'aquarium alors Bob y a touché"

Sachant qu'un seul enfant ment, qui est-il ?

**Énoncé :**

D'abord afin de simplifier les écritures, nous allons poser : A : Alice a cassé l'aquarium, B : Bob a cassé l'aquarium, C : Carole a cassé l'aquarium.

Chacune des variables A, B, C est binaire et prend donc la valeur 0 ou 1.

En retranscrivant les arguments des enfants sous forme logique nous obtenons :

Alice :  $C \wedge (\neg B)$

Bob :  $(\neg B) \wedge (A \vee C)$

Carole :  $A \Rightarrow B$

Nous allons résoudre ce problème à l'aide des tables de vérité élémentaires. Comme il y a trois variables qui prennent deux états, nous avons  $2^3 = 8$  possibilités dont 8 lignes dans nos tableaux (voir page suivante) :

$A$	$B$	$C$	$C \wedge (\neg B)$	$\neg C \wedge (\neg B)$	$(\neg B) \wedge (A \vee C)$	$\neg((\neg B) \wedge (A \vee C))$	$A \Rightarrow B$	$\neg(A \Rightarrow B)$
0	0	0	0	1	0	1	1	0
0	0	1	1	0	1	0	1	0
0	1	0	0	1	0	1	1	0
0	1	1	0	1	0	1	1	0
1	0	0	0	1	1	0	0	1
1	0	1	1	0	1	0	0	1
1	1	0	0	1	0	1	1	0
1	1	1	0	1	0	1	1	0

Maintenant pour le raisonnement, il faut travailler par disjonction de cas. Nous savons qu'un seul enfant a menti.

1. Alice est la menteuse. Nous avons donc :  $\neg C \wedge (\neg B), (\neg B) \wedge (A \vee C), A \Rightarrow B$

$A$	$B$	$C$	$\neg C \wedge (\neg B)$	$(\neg B) \wedge (A \vee C)$	$A \Rightarrow B$
0	0	0	1	0	1
0	0	1	0	1	1
0	1	0	1	0	1
0	1	1	1	0	1
1	0	0	1	1	0
1	0	1	0	1	0
1	1	0	1	0	1
1	1	1	1	0	1

Nous remarquons que les versions ne correspondent pas (pas de 1,1,1, dans une seule des lignes des trois dernières colonnes).

2. Considérons alors que Bob est le menteur. Nous avons donc :

$C \wedge (\neg B), \neg((\neg B) \wedge (A \vee C)), A \Rightarrow B$

$A$	$B$	$C$	$C \wedge (\neg B)$	$\neg((\neg B) \wedge (A \vee C))$	$A \Rightarrow B$
0	0	0	0	1	1
0	0	1	1	0	1
0	1	0	0	1	1
0	1	1	0	1	1
1	0	0	0	0	0
1	0	1	1	0	0
1	1	0	0	1	1
1	1	1	0	1	1

Ici non plus, les versions ne correspondent pas : Bob n'est pas non plus notre menteur !

3. Carole est alors peut-être la menteuse. Nous aurions donc :

$$C \wedge (\neg B), (\neg B) \wedge (A \vee C), \neg(A \Rightarrow B)$$

A	B	C	$C \wedge (\neg B)$	$\neg(\neg B) \wedge (A \vee C)$	$\neg(A \Rightarrow B)$
0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	1	0
0	1	0	0	0	0
0	1	1	0	0	0
1	0	0	0	1	1
1	0	1	1	1	1
1	1	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0

Cette fois, les versions correspondent, Carole a donc menti à ses parents (c'est mal!). De plus, nous remarquons que les filles étaient les fautives, elles ont cassé l'aquarium à deux : Alice et Carole.

C'est donc Carole qui a menti et Alice et Carole sont les destructrices.

Espérons qu'elles soient fortement punies !