



EXERCICES DE
GÉOMETRIE DIFFÉRENTIELLE

EXERCICE 1.

Niveau : Université

Auteur : Dhyne Miguël (28.08.04, miguel.dhyne@win.be)

Mots-clés :

Enoncé :

Calculer la courbure et la torsion de la courbe $\vec{r} = (R \cdot \cos \theta, R \cdot \sin \theta, h \cdot \theta)$

Solution :

Réécrivons l'équation de cette courbe de manière à y voir un peu plus clair :

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R \cdot \cos \theta \\ R \cdot \sin \theta \\ h \cdot \theta \end{pmatrix}$$

Nous savons par la théorie que :

$$K(\theta) = \frac{1}{\|\vec{v}\|} \cdot \left\| \frac{d\vec{t}}{d\theta} \right\|$$

Calculons alors \vec{v} et \vec{t} :

$$\vec{v} = \frac{d\vec{x}}{d\theta} = (-R \cdot \sin \theta, R \cdot \cos \theta, h)$$

$$\vec{t} = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} = \frac{(-R \cdot \sin \theta, R \cdot \cos \theta, h)}{\sqrt{R^2 + h^2}} = \left(\frac{-R \cdot \sin \theta}{\sqrt{R^2 + h^2}}, \frac{R \cdot \cos \theta}{\sqrt{R^2 + h^2}}, \frac{h}{\sqrt{R^2 + h^2}} \right)$$

Replaçons ceci dans l'équation de la courbure, et nous obtenons :

$$K(\theta) = \left\| \left(\frac{-R \cdot \sin \theta}{\sqrt{R^2 + h^2}}, \frac{R \cdot \cos \theta}{\sqrt{R^2 + h^2}}, \frac{h}{\sqrt{R^2 + h^2}} \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{R^2 + h^2}} \right\|$$

$$K(\theta) = \frac{\sqrt{r^2 \cdot \cos^2 \theta + r^2 \cdot \sin^2 \theta + 0}}{r^2 + h^2}$$

$$K(\theta) = \frac{r}{r^2 + h^2}$$

La théorie nous renseigne que la torsion se calcule de cette manière :

$$\tau = \left\| \frac{d\vec{b}}{d\theta} \right\| \cdot \frac{1}{\|\vec{v}\|}$$

Calculons les éléments qui nous manque :

$$\vec{n} = \left\| \frac{d\vec{t}}{d\theta} \right\| = \left\| \frac{d\vec{t}}{d\theta} \right\| \cdot \frac{1}{\|\vec{t}\|} = \frac{1}{\sqrt{R^2 + h^2}} \cdot (-R \cdot \cos \theta, -R \cdot \sin \theta, 0) \cdot \frac{\sqrt{R^2 + h^2}}{R} = (-\cos \theta, -\sin \theta, 0)$$

$$\vec{b} = \vec{t} \times \vec{n} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ -R \cdot \sin \theta & -R \cdot \sin \theta & h \\ \sqrt{R^2 + h^2} & \sqrt{R^2 + h^2} & 0 \end{vmatrix} = (-h \cdot \sin \theta, h \cdot \cos \theta, r) \cdot \frac{1}{\sqrt{R^2 + h^2}}$$

$$\frac{d\vec{b}}{dt} = (h \cdot \cos \theta, h \cdot \sin \theta, 0) \cdot \frac{1}{\sqrt{R^2 + h^2}}$$

Replaçons tout ceci dans l'expression de la torsion, et nous obtenons :

$$\tau = \frac{h}{\sqrt{R^2 + h^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{R^2 + h^2}}$$

$$\tau = \frac{h}{R^2 + h^2}$$

EXERCICE 2.

Niveau : Université

Auteur : Dhyne Miguël (28.08.04, miguel.dhyne@win.be)

Mots-clés :

Enoncé :

Soit la surface S donnée par les équations paramétriques :

$$x = v \cdot \cos u$$

$$y = v \cdot \sin u$$

$$z = k \cdot u$$

avec k une constante $\neq 0$.

1. Ecrire l'équation du plan tangent à S au point $P(0,1,\frac{k\pi}{2})$
2. Le point (u,v) est-il régulier ?
3. Calculer la longueur du segment de la courbe $v=1$ compris entre les points $u=0$ et $u=2\pi$

Solution :

1. Cherchons les valeurs de u et v au point P :

$$0 = v \cdot \cos u$$

$$1 = v \cdot \sin u \Rightarrow u = \frac{\pi}{2} \text{ et } v = 1$$

$$k \frac{\pi}{2} = k \cdot u$$

et $\vec{p} = \vec{v}_1 \times \vec{v}_2$. Or :

$$\vec{v}_1 = (\cos u, \sin u, 0)$$

$$\vec{v}_2 = (-v \cdot \sin u, v \cdot \cos u, k)$$

Et donc $\vec{p} = (k \cdot \sin u, -k \cdot \cos u, v)$

$$\vec{p} \left(\begin{array}{l} u = \pi/2 \\ v = 1 \end{array} \right) = (k, 0, 1)$$

Donc, le plan demandé a pour équation :

$$\Pi \equiv k \cdot (x - 0) + 0 \cdot (y - 1) + 1 \cdot (z - k \frac{\pi}{2}) = 0$$

$$\Pi \equiv kx + z - k \frac{\pi}{2} = 0$$

2. Le point $(u, v) = (0, 1)$ est régulier car les dérivées de la surface en ce point ne sont pas toutes nulles \Leftrightarrow il existe un plan tangent $\Leftrightarrow \vec{p} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{v}_1$ et v_2 linéairement indépendants.

3. $v = 1 \Rightarrow$ courbe $u = 0 \rightarrow 2\pi$

Nous savons que la longueur d'un segment de courbe se calcule de cette manière :

$$s = \int_{u_0}^{u_1} \|\vec{v}(u)\| \cdot du$$

Equations paramétriques de la courbe avec $v = 1$:

$$\begin{aligned} x &= \cos u & \vec{v}(u) &= (-\sin u, \cos u, k) \\ y &= \sin u & \|\vec{v}(u)\| &= \sqrt{1+k^2} \\ z &= ku \end{aligned}$$

$$s = \int_0^{2\pi} \sqrt{1+k^2} \cdot du = 2\pi \cdot (1+k^2)^{1/2}$$

EXERCICE 3.

Niveau : Université

Auteur : Dhyne Miguël (28.08.04, miguel.dhyne@win.be)

Mots-clés :

Enoncé :Soit la surface S d'équation :

$$x = (1 + \alpha^2) \cdot \cos \beta$$

$$y = (1 + \alpha^2) \cdot \sin \beta$$

$$z = \alpha$$

Nous demandons :

1. Calculer la seconde forme fondamentale de cette surface en ce point.
2. Calculer la courbure normale et la courbure géodésique en ce point de la courbe $\beta = 0$

Solution :

1. La seconde forme fondamentale est par définition donné par :

$$b_{ij} = \left(\frac{\partial^2 x}{\partial \alpha^i \partial \beta^j} \circ \vec{p} \right)$$

Or :

$$\frac{\partial^2 x}{\partial \alpha^2} = (-2 \cos \beta, 2 \sin \beta, 0)$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial \alpha \partial \beta} = \frac{\partial^2 x}{\partial \beta \partial \alpha} = (-2 \cdot \alpha \cdot \sin \beta, 2 \cdot \alpha \cdot \cos \beta, 0)$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial \beta^2} = ((-1 + \alpha^2) \cdot \cos \beta, -(1 + \alpha^2) \cdot \sin \beta, 0)$$

$$\vec{p} = \vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 2 \cdot \alpha \cdot \cos \beta & 2 \cdot \alpha \cdot \sin \beta & 1 \\ -(1 + \alpha^2) \cdot \sin \beta & (1 + \alpha^2) \cdot \cos \beta & 0 \end{vmatrix} = (1 + \alpha^2) \cdot (-\cos \beta, -\sin \beta, 2\alpha)$$

Calculons les valeurs de α et β au point P :

$$1 = (1 + \alpha^2) \cdot \cos \beta$$

$$0 = (1 + \alpha^2) \cdot \sin \beta \quad \Rightarrow \alpha = 0 \text{ et } \beta = 0$$

$$0 = \alpha$$

Nous avons alors le vecteur $\vec{p} = (-1,0,0)$ - il est bien normé - et donc :

$$b_{ij} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Nous avons :

$$K\vec{n} = K_g \vec{t}_2 + K_n \vec{p} \Rightarrow (K\vec{n} \circ \vec{p}) = K_n$$

et également :

$$K^2 = K_g^2 + K_n^2 \text{ avec } K = \left\| \frac{d\vec{t}}{d\alpha} \right\| \cdot \frac{1}{\|\vec{v}\|} = 2$$

et comme :

$$\vec{n} = (1,0,0)$$

Il vient :

$$K_n = (2,0,0) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 2$$

d'où :

$$K = 2$$

$$K_n = 2$$

$$K_g = 0$$