EXERCICES DE

GÉOMETRIE ANALYTIQUE

EXERCICE 1.

Niveau : Université
Auteur : Dhyne Miguël (26.08.04, miguel.dhyne@win.be)
Mots-clés :

Enoncé :

Trouvez l'équation implicite de l'ellipsoïde de révolution grâce à ses équations paramétriques :

$$x = a \cdot \cos\theta \cdot \cos\lambda$$
$$y = a \cdot \cos\theta \cdot \sin\lambda$$
$$z = c \cdot \sin\theta$$

Solution :

Nous avons donc :

$$x^2 = a^2 \cdot \cos^2\theta \cdot \cos^2\lambda$$
$$y^2 = a \cdot \cos^2\theta \cdot \sin^2\lambda$$
$$z^2 = c^2 \cdot \sin^2\theta$$

d'où :

$$x^2 + y^2 = a^2 \cdot \cos^2\theta$$
$$z^2 = c^2 \cdot \sin^2\theta$$

dès lors :

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} = \cos^2\theta$$
$$\frac{z^2}{c^2} = \sin^2\theta$$

Finalement :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$$

EXERCICE 2.

Niveau : Université
Auteur : Dhyne Miguël (26.08.04, miguel.dhyne@win.be)
Mots-clés :

Enoncé :

Considérons deux droites $D1$ et $D2$ d'équations :

$$D1 \equiv \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad D2 \equiv \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

1. Montrez qu'elles sont gauches
2. Ecrire l'équation implicite du plan $\Pi1$ contenant $D2$ et parallèle à $D1$
3. Ecrire l'équation implicite du plan $\Pi2$ contenant $D1$ et parallèle à l'axe OX
4. Montrez que ces deux plans sont sécants. Trouvez les équations paramétriques de la droite d'intersection $D3$.
5. Cherchez les coordonnées du point d'intersection I des droites $D2$ et $D3$
6. Ecrire les équations paramétriques de la droite $D4$ passant par I et parallèle à l'axe OX
7. Montrez que $D4$ coupe $D1$ en un point J. Calculez les coordonnées de J.
8. Ecrire les équations implicite du plan $\Pi3$ passant par l'intersection de $\Pi1$ et $\Pi2$ et passant par le point (1,2,3)
9. Ecrire les équations paramétriques de $D6$ qui s'appuie sur $D1$, $D2$ et qui passe par le point (2,0,2).

Solutions :

1. $(1,0,0) \neq \alpha \cdot (-2,0,1) \quad \Rightarrow$ elles ne sont pas parallèles

Y a-t-il un point d'intersection ?

$1 = -2$
$0 = -\mu \qquad \Rightarrow$ NON, il n'y a pas de point d'intersection
$\lambda = 1$

Et donc, nous pouvons conclure que comme elles ne sont pas parallèles, et qu'il n'y a pas de point d'intersection et donc ces deux droites sont gauches.

2. $\Pi1 \equiv x = -2$

3. $\Pi 2 \equiv y = 0$

4. $D3 \equiv \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ k \end{pmatrix}$

5. $I = (-2,0,1)$

6. $D4 \equiv \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2+\alpha \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$-2+\alpha = 1 \rightarrow \alpha = 3$

7. $0 = 0$

$1 = 1 \cdot \lambda$

Et donc $J = (1,0,1)$

EXERCICE 3.

Niveau : Université
Auteur : Dhyne Miguël (26.08.04, miguel.dhyne@win.be)
Mots-clés :

Enoncé :

Dans un repère non orthogonal $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ tel que $(\vec{e}_i \circ \vec{e}_i) = 1$ pour $i = 1,2,3$, nous avons $(\vec{e}_1 \circ \vec{e}_2) = \dfrac{1}{2}$, ainsi que $(\vec{e}_1 \circ \vec{e}_3) = (\vec{e}_2 \circ \vec{e}_3) = 0$.

Nous considérons les plans :

$$\Pi 1 \equiv x + 2y + z = 0 \text{ et } \Pi 2 \equiv 2x + 4y + 2z = 5$$

Et les droites :

$$D1 \equiv \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot t \quad \text{et} \quad D2 \equiv \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot t$$

Les questions sont les suivantes :

1. $\Pi 1 // \Pi 2$?

2. $D1$ // $\Pi 1$?

3. $D1 \perp \Pi 1$?

4. $D2 \perp D1$?

5. Angle entre $D2$ et $\Pi 2$?

6. Distance entre $D1$ et $D2$?

7. Ecrire les équations paramétriques de $\Pi 2$.

8. Ecrire les équations implicites de $D2$

9. Si nous effectuons le changement de base suivant :

$$\begin{aligned} \vec{e}_1\,' &= \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2\,' &= \vec{e}_2 - \vec{e}_1 \\ \vec{e}_3\,' &= \vec{e}_3 \end{aligned}$$

Quelle est l'équation implicite du plan $\Pi 1$ dans ce repère ?

Solution :

1. C'est trivial :

$$\vec{p}_1 = 2 \cdot \vec{r}_2 \Rightarrow \Pi 1 \ // \ \Pi 2$$

2. Il suffit de vérifier par un petit produit scalaire :

$$D1 \ // \ \Pi 1 \Leftrightarrow \vec{d}_1 \circ \vec{p}_1 = 0$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

Ils sont donc perpendiculaire et non parallèles.

3. Nous avons y avons répondu à la question précédente. C'est oui.

4. $D2 \perp D1 \Leftrightarrow \vec{d}_2 \circ \vec{d}_1 = 0$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{contravariante}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{cov}\,ariante} = \frac{1}{2} \Rightarrow D2 \text{ n'est donc pas perpendiculaire à } D1$$

5. Nous avons :

$$\theta = Arc\cos\left(\frac{\left(\vec{d}_2 \circ \vec{p}_2\right)}{\left\|\vec{d}_2\right\| \cdot \left\|\vec{p}_2\right\|} \right)$$

avec :

$$(\vec{d}_2 \cdot \vec{p}_2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = 12$$

$$\left\|\vec{d}_2\right\| = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 8$$

$$\left\|\vec{p}_2\right\| = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = 20$$

d'où $\theta = 85°$

6. Comme $D1 \cap D2$, la distance entre ces deux droites est nulle.

7. Soit $P = \left(\dfrac{1}{2},1,0\right)$ et $Q = (3,0,\dfrac{-1}{2})$ et $R = (0,1,\dfrac{1}{2})$, trois points du plan obtenu en posant 2 variables et la troisièmes étant alors la solution de l'équation obtenue :

$$\Pi 2 \equiv \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+3\alpha+\dfrac{1}{2}\beta \\ -\alpha \\ -\dfrac{1}{2}-\alpha-\dfrac{1}{2}\beta \end{pmatrix}$$

8. Nous avons donc :

$$D2 \equiv \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+t \\ 2+2t \\ 1+t \end{pmatrix} \begin{matrix} (1) \\ (2) \\ (3) \end{matrix}$$

Ce qui revient au système :

$$\begin{aligned} &(1) \rightarrow t = x-3 \\ &(2) \rightarrow y = 2+2x-6 \\ &(3) \rightarrow z = 1+x-3 \end{aligned}$$

$\Rightarrow 2x - y - 4 = 0$ et $x - z - 2 = 0$ les équations implicites de la droite.

9. La matrice du changement de base est trivialement :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Dès lors :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

et finalement :

$$\Pi 1' \equiv x + y + z = 0$$

EXERCICE 4.

Niveau : Université
Auteur : Dhyne Miguël (30.08.04, miguel.dhyne@win.be)
Mots-clés :

Enoncé :

Quelle conique est représentée par l'équation suivante :

$$Q(x,y,z) \equiv 3x^2 - 2xy + 3y^2 - z^2 + 4x = 0$$

Donnez ses axes de symétries, son centre, est-elle réglée ?

Solution :

$$B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\det(B - \lambda I) = (-1-\lambda)\cdot\left[(3-\lambda)^2 - 1\right]$$

$$\det(B - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = 2 \text{ ou } ,\lambda_3 = 4$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = 6x - 2y + 4 = 0 \qquad \frac{\partial Q}{\partial y} = -2x + 6y = 0 \qquad \frac{\partial Q}{\partial z} = -2z = 0$$

Donc le centre de cette quadrique est $C = (-\frac{3}{4}, -\frac{1}{4}, 0)$

$$\left(B - \lambda_i I\right)\cdot v_i = 0$$

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \vec{v}_1 = (0,0,1)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \vec{v}_2 = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0)$$

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \vec{v}_3 = (\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0)$$

Les axes de symétries sont :

$$A \equiv \begin{array}{l} x = -\tfrac{3}{4} + 0 \cdot \beta \\ y = -\tfrac{1}{4} + 0 \cdot \beta \\ z = 0 + 1 \cdot \beta \end{array} \qquad B \equiv \begin{array}{l} x = -\tfrac{3}{4} + \tfrac{\sqrt{2}}{2} \cdot \gamma \\ y = -\tfrac{1}{4} + \tfrac{\sqrt{2}}{2} \cdot \gamma \\ z = 0 + 0 \cdot \gamma \end{array} \qquad C \equiv \begin{array}{l} x = -\tfrac{3}{4} + \tfrac{\sqrt{2}}{2} \cdot \delta \\ y = -\tfrac{1}{4} - \tfrac{\sqrt{2}}{2} \cdot \delta \\ z = 0 + 0 \cdot \delta \end{array}$$

$$Q(c) = Q(-\tfrac{3}{4}, -\tfrac{1}{4}, 0) = -\tfrac{3}{2}$$

L'équation de la quadrique est alors :

$$-x^2 + 2y^2 + 4z^2 = \frac{3}{2} \qquad \text{Hyperboloïde à une nappe}$$

Elle est donc bien réglée.

EXERCICE 5.

Niveau : Université
Auteur : Dhyne Miguël (30.08.04, miguel.dhyne@win.be)
Mots-clés :

Enoncé :

D'après les valeurs du paramètres $\mu \in R$, discutez le type de la ou des quadrique(s) se cachant dans l'expression ci-dessous :

$$Q(x,y,z) \equiv x^2 + (\mu+1)\cdot z^2 - \mu \cdot xy + 2z = 0$$

Solution :

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -\mu/2 & 0 \\ -\mu/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \mu+1 \end{pmatrix}$$

$$\det(B - \lambda I) = (\mu + 1 - \lambda)\cdot(\lambda^2 - \lambda - \frac{\mu^2}{4}) = 0$$

Les valeurs propres sont donc :

$$\lambda_1 = \mu + 1 \qquad \lambda_2 = \frac{1+\sqrt{1+\mu^2}}{2} \qquad \lambda_3 = \frac{1-\sqrt{1+\mu^2}}{2}$$

<u>*Discussion :*</u>

A. Si $\mu \neq 0,-1 \Rightarrow Q$ centrée :

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = 2x - \mu y = 0 \qquad \frac{\partial Q}{\partial y} = -\mu x = 0 \qquad \frac{\partial Q}{\partial z} = 2\cdot(\mu+1)\cdot z + 2 = 0$$

$$\Rightarrow C = \left(0,0,\frac{-1}{\mu+1}\right)$$

$$Q(C) = (\mu+1)\cdot\frac{1}{(\mu+1)^2} + 2\cdot(-\frac{1}{\mu+1}) = \frac{-1}{\mu+1}$$

Donc, l'équation est du type :

$$Q(x,y,z) \equiv (\mu+1)\cdot x^2 + \frac{1+\sqrt{1+\mu^2}}{2}\cdot y^2 + \frac{1-\sqrt{1+\mu^2}}{2}\cdot z^2 - \frac{1}{\mu+1} = 0$$

Faisons un tableau de signe pour voir les différentes configurations possibles suivant les valeurs de μ :

		-1	
λ_1	-	0	+
λ_2	+	+	+
λ_3	-	-	-
$Q(C)$	+	///	-

Si $\mu > -1 \quad \Rightarrow Q$ est une hyperboloïde à une nappe
Si $\mu < -1 \quad \Rightarrow Q$ est une hyperboloïde à deux nappes

Il nous reste à traiter les cas où $\mu = -1$ et $\mu = 0$

B. Si $\mu = -1$

Q est dégénérée, l'équation est :

$$Q(x,y,z) = x^2 + xy + 2z = 0$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det(B-\lambda I) = (1-\lambda)\cdot(-\lambda)^2 + \frac{\lambda}{4} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda_1 = 0 \qquad \lambda_2 = \frac{1+\sqrt{2}}{2} \qquad \lambda_3 = \frac{1-\sqrt{2}}{2}$$

Calculons maintenant les vecteurs (méthode voir exercice précédant) :

$$\vec{v}_1 = (0,0,1) \qquad \vec{v}_2 = \left(\frac{2\lambda_2}{\sqrt{4\lambda_2{}^2+1}}, \frac{1}{\sqrt{4\lambda_2{}^2+1}}, 0\right) \quad \vec{v}_3 = \left(\frac{-2\lambda_3}{\sqrt{4\lambda_3{}^2+1}}, \frac{-1}{\sqrt{4\lambda_3{}^2+1}}, 0\right)$$

Changement de base :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{v}_1^{\,1} & \vec{v}_2^{\,1} & \vec{v}_3^{\,1} \\ \vec{v}_1^{\,2} & \vec{v}_2^{\,2} & \vec{v}_3^{\,2} \\ \vec{v}_1^{\,3} & \vec{v}_2^{\,3} & \vec{v}_3^{\,3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

L'équation devient alors :

$$\frac{4+3\sqrt{2}}{4+2\sqrt{2}}y'^2+\frac{4-3\sqrt{2}}{4-2\sqrt{2}}z'^2+2x'=0 \qquad \text{Paraboloïde hyperbolique}$$

C. Si $\mu = 0$

L'équation est alors :

$$Q(x,y,z) \equiv x^2+z^2+2z=0$$

(la réduction est déjà à moitié faite, aucun terme linéaire)

Translation sur les variables correspondant aux valeurs propres non nulles :

$$x'=x$$
$$y'=y$$
$$z'=z+\frac{2}{2\cdot 1}$$

L'équation finale est alors :

$$Q(x',y',z') \equiv x'^2+z'^2-1=0 \qquad \text{Cylindre elliptique}$$