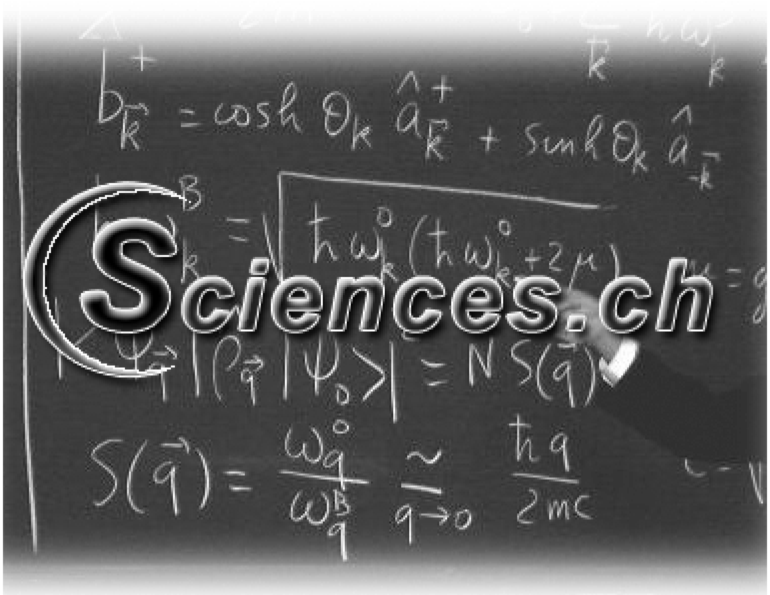

EXERCICES DE

CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL

EXERCICE 1.

Niveau : Lycée
Auteur : Dhyne Miguël (09.08.04, miguel.dhyne@win.be)
Mots-clés : intégrale simple de sommation

Énoncé :

Soit à calculer l'intégrale :

$$\int_{-3}^{0}\left(x^3+2x^2-1\right)dx=...$$

Solution :

Nous savons que l'intégrale d'une somme est égale à la somme des intégrales, soit :

$$\int_{-3}^{0}x^3dx+2\int_{-3}^{0}x^2dx-\int_{-3}^{0}dx=\left[\frac{x^4}{4}\right]_{-3}^{0}+2\cdot\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-3}^{0}-\left[x\right]_{-3}^{0}=0-\frac{81}{4}+2\cdot 0-2\cdot\frac{27}{3}-0-3$$

$$=-\frac{81}{4}-21=\frac{-81-84}{4}=\frac{-165}{4}$$

EXERCICE 2.

Niveau : Lycée
Auteur : Dhyne Miguël (09.08.04, miguel.dhyne@win.be)
Mots-clés : intégrale, substitution

Énoncé :

Soit à calculer l'intégrale :

$$\int_1^2 \frac{x-1}{x^2-2x+2}dx = ...$$

Solution :

Résolvons cette intégrale par substitution en posant $u = x^2 - 2x + 2$ et donc :

$$du = 2x - 2 = 2(x-1)$$

L'intégrale de départ devient alors :

$$\frac{1}{2}\int_1^2 \frac{du}{u} = \frac{1}{2}\left[\ln(u)\right]_1^2 = \frac{1}{2}\left(\ln(2)-\ln(1)\right) = \frac{1}{2}\ln(2)$$

Remarque : quand nous remplaçons la fonction de départ par la fonction *u*, nous devons veiller à changer les bornes de l'intégration. Ici, le hasard fait que les bornes sont inchangées.

EXERCICE 3.

Niveau : Lycée
Auteur : Dhyne Miguël (09.08.04, miguel.dhyne@win.be)
Mots-clés : intégrale, substitution

Énoncé :

Soit à calculer l'intégrale :

$$\int_1^e \frac{\ln(t)}{t} dt = ...$$

Solution :

Résolvons cette équation par substitution :

Soit $u = \ln(t)$ et donc $du = \frac{1}{t}$ l'intégrale de départ devient alors :

$$\int_0^1 u \cdot du = \left[\frac{u^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

EXERCICE 4.

Niveau : Lycée
Auteur : Dhyne Miguël (09.08.04, miguel.dhyne@win.be)
Mots-clés : intégration par parties

Énoncé :

Soit à calculer l'intégrale :

$$\int_1^e \ln(x)dx = ...$$

Solution :

Malheureusement, il n'existe pas d'intégrale directe pour résoudre celle-ci. Nous devons alors trouver une astuce : il suffit de multiplier par 1 et donc, ainsi on fait apparaître une intégrale d'un produit de fonction, et donc nous pouvons utiliser l'intégration par parties :

$$\int_1^e 1 \cdot \ln(x)dx$$

Soit :

$$f = \ln(x) \quad \text{et} \quad g' = 1$$

Donc :

$$f' = \frac{1}{x} \quad \text{et} \quad g = x$$

Ce qui nous donne finalement :

$$\int_1^e 1 \cdot \ln(x)dx = \left[x \cdot \ln(x)\right]_1^e - \int_1^e dx = e - e + 1 = 1$$

EXERCICE 5.

Niveau : Lycée
Auteur : Dhyne Miguël (09.08.04, miguel.dhyne@win.be)
Mots-clés : intégrale simple

Énoncé :

Soit à calculer l'intégrale :

$$\int_1^2 2\cdot e^{3x}dx=...$$

Solution :

Essayons de trouver une solution "directe" :

Nous savons (du moins supposons) que $\left(e^{3x}\right)'=3\cdot e^{3x}$, or notre expression de départ y ressemble fort à une constant près, éliminons cette constante de façon à obtenir une intégrale directe. Notre intégrale devient alors :

$$\frac{2}{3}\int_1^2 3\cdot e^{3x}dx=\frac{2}{3}\cdot\left[e^{3x}\right]_1^2=\frac{2}{3}\cdot\left(e^6-e^3\right)=\frac{2}{3}\cdot e^3\cdot\left(e^2-1\right)$$

EXERCICE 6.

Niveau : Lycée
Auteur : Dhyne Miguël (09.08.04, miguel.dhyne@win.be)
Mots-clés : intégration par parties

Énoncé :

Soit à calculer l'intégrale :

$$\int_1^2 (x+1)\cdot \ln x \cdot dx = ...$$

Solution :

Utilisons l'intégration par partie :

$$\int f\cdot g' = f\cdot g - \int f'\cdot g$$

Soit :

$$f = \ln x \quad \text{et} \quad g' = (x+1)$$

Donc :

$$f' = \frac{1}{x} \quad \text{et} \quad g = \frac{x^2+2x}{2}$$

L'intégrale de départ devient alors :

$$\int_1^2 (x+1)\cdot \ln x\cdot dx = \left[\frac{x^2+2x}{2}\cdot \ln x\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{x^2+2x}{2x}dx = 4\cdot\ln(2) - \frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^2 - [x]_1^2$$

$$= 4\cdot\ln(2) - 1 + \frac{1}{4} - 2 + 1 = 4\cdot\ln(2) - \frac{7}{4}$$

EXERCICE 7.

Niveau : Lycée
Auteur : Dhyne Miguël (09.08.04, miguel.dhyne@win.be)
Mots-clés : intégration par parties

Énoncé :

Soit à calculer l'intégrale :

$$\int_1^e \frac{\ln x}{x^2}\,dx = \ldots$$

Solution :

Utilisons à nouveau l'intégration par parties :

$$\int f\cdot g' = f\cdot g - \int f'\cdot g$$

Soit :

$$f = \ln x \quad \text{et} \quad g' = \frac{1}{x^2}$$

Donc :

$$f' = \frac{1}{x} \quad \text{et} \quad g = \frac{-1}{x}$$

L'intégrale de départ devient alors :

$$\int_1^e \frac{\ln x}{x^2}\,dx = \left[\frac{-\ln x}{x}\right]_1^e - \int_1^e \frac{1}{x^2}\,dx = \frac{-1}{e} - \left[\frac{-1}{x}\right]_1^e = \frac{-2}{e} + 1$$

EXERCICE 8.

Niveau : Lycée
Auteur : Dhyne Miguël (09.08.04, miguel.dhyne@win.be)
Mots-clés : intégrale d'un produit de fonctions, trigonométrie

---

Énoncé :

Soit à calculer l'intégrale :

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} x^2 \cdot \sin^2(x)dx = ...$$

Solution :

On sait, par la trigonométrie que $\sin^2(x) = \dfrac{1-\cos(2x)}{2}$, l'intégrale devient alors :

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} x^2 \cdot \frac{1-\cos(2x)}{2}dx = \frac{1}{2}\cdot\int_0^{\frac{\pi}{3}} x^2dx - \frac{1}{2}\cdot\int_0^{\frac{\pi}{3}} x^2\cdot\cos(2x)dx = \frac{1}{2}\cdot\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{3}} - \frac{1}{2}\cdot\int_0^{\frac{\pi}{3}} x^2\cdot\cos(2x)dx$$

Pour résoudre l'intégrale qu'il reste, utilisons la formule de l'intégrale d'un produit de fonctions, avec :

Soit :

$$f = x^2 \quad \text{et} \quad g' = \cos(2x)$$

Donc :

$$f' = 2x \quad \text{et} \quad g = \frac{\sin 2x}{2}$$

Il vient alors :

$$= \frac{1}{2}\cdot\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{3}} - \left[\frac{1}{4}\cdot\sin(2x)\cdot x^2\right]_0^{\frac{\pi}{3}} + \frac{1}{2}\cdot\int_0^{\frac{\pi}{3}} -\frac{2x\cdot\sin(2x)}{2}dx$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi^3}{81} - \frac{\pi^2}{36}\cdot\sin(\frac{2\pi}{3}) - \frac{1}{2}\cdot\int_0^{\frac{\pi}{3}} x\cdot\sin(2x)dx$$

Pour résoudre l'intégrale qu'il nous reste appliquons encore une fois l'intégration par parties :

Soit :

$$f = x \quad \text{et} \quad g' = \sin(2x)$$

Donc :

$$f'=1 \quad \text{et} \quad g=\frac{-\cos(2x)}{2}$$

L'intégrale de départ devient alors :

$$=\frac{\pi^3}{162}-\frac{\pi^2}{36}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\cdot\left[\frac{-x\cdot\cos(2x)}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{3}}-\frac{1}{4}\cdot\int_0^{\frac{\pi}{3}}\cos(2x)dx$$

$$=\frac{\pi^3}{162}-\frac{\pi^2}{36}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{-\frac{\pi}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}-\frac{1}{4}\cdot\left[\frac{\sin(2x)}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{3}}$$

$$=\frac{\pi^3}{162}-\frac{\pi^2}{72}\cdot\sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}}{24}\cdot\pi-\frac{1}{16}\cdot\sqrt{3}$$

EXERCICE 9.

Niveau : Lycée
Auteur : Dhyne Miguël (09.08.04, miguel.dhyne@win.be)
Mots-clés : intégrale simple, substitution

Énoncé :

Soit à calculer l'intégrale :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5(x)\cdot\sin(x)dx = ...$$

Solution :

Résolvons cette intégrale par substitution :

Soit :

$$u = \cos^3(x) \text{ et donc } du = 3\cdot\cos^2(x)\cdot\sin(x)$$

L'intégrale de départ devient donc :

$$\frac{1}{3}\int_1^0 u\cdot du = \frac{1}{3}\cdot\left[\frac{u^2}{2}\right]_1^0 = \frac{1}{3}\cdot\left(0-\frac{1}{2}\right) = \frac{-1}{6}$$

EXERCICE 10.

Niveau : Lycée
Auteur : Dhyne Miguël (09.08.04, miguel.dhyne@win.be)
Mots-clés : intégrale d'un produit de fonctions, substitution

Énoncé :

Soit à calculer l'intégrale :

$$\int_0^1 Arc\tan(x)\cdot dx = ...$$

Solution :

Nous allons multiplier par 1 l'argument de l'intégrale afin de faire apparaître un produit de fonction, et ensuite utiliser la formule d'intégration d'un produit de deux fonctions :

$$\int_0^1 1\cdot Arc\tan(x)\cdot dx$$

Soit :

$$f = Arc\tan(x) \quad \text{et} \quad g' = 1$$

Donc :

$$f' = \frac{1}{1+x^2} \quad \text{et} \quad g = x$$

L'intégrale devient donc :

$$= \left[x\cdot Arc\tan(x)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}dx$$

Pour résoudre l'intégrale restante, nous allons procéder par substitution :

Soit :

$$u = 1+x^2 \quad \text{et donc} \quad du = 2x$$

L'intégrale devient alors :

$$\int_0^1 Arc\tan(x)\cdot dx = ... = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\cdot\int_1^2 \frac{du}{u} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\cdot\ln(2) + \frac{1}{2}\cdot\ln(1) = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\pi}{2} - \ln(2)\right)$$

EXERCICE 11.

Niveau : Lycée
Auteur : Dhyne Miguël (09.08.04, miguel.dhyne@win.be)
Mots-clés : intégrale simple, substitution, trigonométrie

Énoncé :

Soit à calculer l'intégrale :

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\sin^2(x)\cdot\cos^2(x)}dx = ...$$

Solution :

Par la trigonométrie, nous savons que : $\dfrac{1}{\cos^2(x)} = 1+\tan^2(x)$

Ainsi, l'intégrale de départ devient :

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1+\tan^2(x)}{\sin^2(x)}dx$$

Nous savons aussi que l'intégrale d'une somme c'est la somme des intégrales :

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\sin^2(x)}dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos^2(x)}dx = \left[-\cot an(x)\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} + \left[\tan(x)\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3} + 1 + \sqrt{3-1} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

EXERCICE 12.

Niveau : Lycée
Auteur : Dhyne Miguël (26.08.04, miguel.dhyne@win.be)
Mots-clés : dérivation d'une somme

Enoncé :

Calculer la dérivée de :

$$2 \cdot x^3 + 5 \cdot x^2 + 3 \cdot x + 2$$

Solution :

$$(2 \cdot x^3 + 5 \cdot x^2 + 3 \cdot x + 2)' = (2 \cdot x^3)' + (5 \cdot x^2)' + (3 \cdot x)' + (2)'$$

$$= 2 \cdot (x^3)' + 5 \cdot (x^2)' + 3 \cdot (x)' + (2)' = 2 \cdot 3 \cdot x^2 + 5 \cdot 2 \cdot x + 3 \cdot 1 + 0$$

$$= 6 \cdot x^2 + 10 \cdot x + 3$$

EXERCICE 13.

Niveau : Lycée
Auteur : Dhyne Miguël (26.08.04, miguel.dhyne@win.be)
Mots-clés : dérivation d'une somme, trigonométrie

Enoncé :

Calculer la dérivée de :

$$5 \cdot \sin(x) + 3 \cdot \cos(x)$$

Solution :

$$[5 \cdot \sin(x) + 3 \cdot \cos(x)]' = 5 \cdot [\sin(x)]' + 3 \cdot [\cos(x)]'$$

$$= 5 \cdot \cos(x) + 3 \cdot (-\sin(x)) = 5 \cdot \cos(x) - 3 \cdot \sin(x)$$

EXERCICE 14.

Niveau : Lycée
Auteur : Dhyne Miguël (26.08.04, miguel.dhyne@win.be)
Mots-clés : dérivation, trigonométrie

Enoncé :

Calculer la dérivée de :

$$\tan(x)$$

Solution :

$$(\tan(x))' = \left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right)'$$

$$= \frac{(\sin x)' \cdot \cos x - \sin x \cdot (\cos x)'}{\cos^2(x)} = \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot (-\sin x)}{\cos^2(x)}$$

$$= \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$$

EXERCICE 15.

Niveau : Lycée
Auteur : Dhyne Miguël (26.08.04, miguel.dhyne@win.be)
Mots-clés : dérivation de fonctions composées

Enoncé :

Calculer la dérivée de :

$$e^{\cos(2x)}$$

Solution :

$$(e^{\cos(2x)})' = -2\sin(x)\cdot e^{2\cos(x)}$$

EXERCICE 16.

Niveau : Lycée
Auteur : Dhyne Miguël (26.08.04, miguel.dhyne@win.be)
Mots-clés : dérivation simple

Enoncé :

Calculer la dérivée de :

$$\frac{\ln(x)}{x}$$

Solution :

$$\left(\frac{\ln(x)}{x}\right)' = \left(\ln(x)\cdot\frac{1}{x}\right)' = (\ln x)'\cdot\frac{1}{x} + \ln x\cdot\left(\frac{1}{x}\right)'$$

$$= \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x} + \ln x\cdot\left(\frac{-1}{x^2}\right) = \frac{1}{x^2}(1-\ln x)$$

EXERCICE 17.

Niveau : Lycée
Auteur : Dhyne Miguël (26.08.04, miguel.dhyne@win.be)
Mots-clés : dérivée simple, trigonométrie

Enoncé :

Calculer la dérivée de :

$$\text{cotan}(x)$$

Solution :

$$(\text{cotan}(x))' = \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = \frac{(\cos x)' \cdot \sin x - \cos x \cdot (\sin x)'}{\sin^2(x)}$$

$$= \frac{-\sin x \cdot \sin x - \cos x \cdot \cos x}{\sin^2 x} = \frac{-(\sin^2 x + \cos^2 x)}{\sin^2 x} = \frac{-1}{\sin^2 x}$$

EXERCICE 18.

Niveau : Lycée
Auteur : Dhyne Miguël (26.08.04, miguel.dhyne@win.be)
Mots-clés : dérivée d'un produit de fonctions

Enoncé :

Calculer la dérivée de :

$$\sin x \cdot e^x (2 \cdot x - 3)$$

Solution :

$$\begin{aligned}\left[\sin x \cdot e^x \cdot (2 \cdot x - 3)\right]' &= (\sin x \cdot e^x)' \cdot (2 \cdot x - 3) + (\sin x \cdot e^x) \cdot (2 \cdot x - 3)' \\ &= \left[(\sin x)' \cdot e^x + \sin x \cdot (e^x)'\right] \cdot (2 \cdot x - 3) + \sin x \cdot e^x \cdot 2 \\ &= (\cos x \cdot e^x + \sin x \cdot e^x) \cdot (2 \cdot x - 3) + 2 \cdot \sin x \cdot e^x \\ &= e^x \cdot \left[(\cos + \sin x) \cdot (2 \cdot x - 3) + 2 \cdot \sin x\right]\end{aligned}$$

EXERCICE 19.

Niveau : Lycée
Auteur : Dhyne Miguël (26.08.04, miguel.dhyne@win.be)
Mots-clés : dérivée simple d'un rapport

Enoncé :

Calculer la dérivée de :

$$\frac{(x+1)}{(x-1)}$$

Solution :

$$\left[\frac{(x+1)}{(x-1)}\right]' = \frac{(x+1)' \cdot (x-1) - (x+1) \cdot (x-1)'}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{x-1-x-1}{(x-1)^2} = \frac{-2}{(x-1)^2}$$

EXERCICE 20.

Niveau : Lycée
Auteur : Dhyne Miguël (26.08.04, miguel.dhyne@win.be)
Mots-clés : dérivée produit + rapport de fonctions

Enoncé :

Calculer la dérivée de :

$$\frac{(\sin x+\cos x)\cdot e^{x}}{\ln x}$$

Solution :

$$\left[\frac{(\sin x+\cos x)\cdot e^{x}}{\ln x}\right]'=\frac{\left[(\sin x+\cos x)\cdot e^{x}\right]\cdot\ln x-(\ln x)'\cdot e^{x}\cdot(\sin x+cox)}{\ln^{2}x}$$

$$=\frac{\left[(\sin x+\cos x)'\cdot e^{x}+(\sin x+\cos x)\cdot(e^{x})'\right]\cdot\ln x-\dfrac{e^{x}}{x}\cdot(\sin x+\cos x)}{\ln^{2}x}$$

$$=\frac{\left[(\cos x-\sin x)\cdot e^{x}+(\sin x+\cos x)\cdot e^{x}\right]\cdot\ln x-\dfrac{e^{x}}{x}\cdot(\sin x+\cos x)}{\ln^{2}x}$$

$$=\frac{2\cdot\cos x\cdot e^{x}\cdot\ln x-\dfrac{e^{x}}{x}\cdot(\sin x+\cos x)}{\ln^{2}x}$$

EXERCICE 21.

Niveau : Lycée
Auteur : Dhyne Miguël (26.08.04, miguel.dhyne@win.be)
Mots-clés : développement limité

Enoncé :

Donnez le développement limité d'ordre 4 autour de 0 de la fonction suivante :

$$\sin(x)$$

Solution :

Ordre n	$f^{n'}(x)$	$f^{n'}(0)$
0	$\sin(x)$	0
1	$\cos(x)$	1
2	$-\sin(x)$	0
3	$-\cos(x)$	-1
4	$\sin(x)$	0

Nous pouvons donc approximer la fonction demandée par :

$$0+1\cdot x+0\cdot\frac{x^2}{2!}-1\cdot\frac{x^3}{3!}+0\cdot\frac{x^4}{4!}$$

EXERCICE 22.

Niveau : Université
Auteur : Dhyne Miguël (26.08.04, miguel.dhyne@win.be)
Mots-clés : développement limité

Enoncé :

Donnez le développement limité d'ordre 2 de la fonction suivante :

$$(1+\sin x)^{\frac{1}{2}}$$

Solution :

Ordre n	$f^{n'}(x)$	$f^{n'}(0)$
0	$(1+\sin x)^{\frac{1}{2}}$	1
1	$\frac{1}{2}\cdot(1+\sin x)^{\frac{-1}{2}}\cdot\cos x$	$\frac{1}{2}$
2	$\frac{1}{2}\cdot\left[\left(-\frac{1}{2}\cdot\cos x\cdot(1+\sin x)^{-\frac{3}{2}}\right)\cdot\cos x+\sin x\cdot(1+\sin x)^{\frac{-1}{2}}\right]$	$-\frac{1}{4}$

Nous pouvons alors approximer la fonction demandée par :

$$1+\frac{1}{2}\cdot x-\frac{1}{4}\cdot\frac{x^2}{2!}$$

EXERCICE 23.

Niveau : Lycée
Auteur : Dhyne Miguël (26.08.04, miguel.dhyne@win.be)
Mots-clés : développement limité

Enoncé :

Trouvez le développement limité d'ordre 3 de la fonction suivante autour de $x_0 = 1$:

$$\sqrt{x}$$

Solution :

Ordre n n	$f^{n'}(x)$	$f^{n'}(1)$
0	$\sqrt{x}$	1
1	$\frac{1}{2}\cdot x^{-1/2}$	$\frac{1}{2}$
2	$\frac{-1}{4}\cdot x^{\frac{-3}{2}}$	$\frac{-1}{4}$
3	$\frac{3}{8}\cdot x^{\frac{-5}{2}}$	$\frac{3}{8}$

Nous pouvons donc approximer la fonction demandée par :

$$1+\frac{1}{2}\cdot(x-1)-\frac{1}{4}\cdot\frac{(x-1)^2}{2!}+\frac{3}{8}\cdot\frac{(x-1)^3}{3!}$$

EXERCICE 24.

Niveau : Université
Auteur : Dhyne Miguël (26.08.04, miguel.dhyne@win.be)
Mots-clés : dérivées partielles

Enoncé :

Soit f une fonction définie par :

$$f : R^2 \to R$$
$$(x, y) \to f(x, y)$$

On effectue les changements de variables :

$$x = r \cdot \cos\theta$$
$$y = r \cdot \sin\theta$$

On obtient ainsi une fonction F définie par :

$$F : R^2 \to R$$
$$(r, \theta) \to f(r \cdot \cos\theta, r \cdot \sin\theta)$$

Calculer les dérivées partielles de F en fonction de celles de f et prouver que :

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}(r \cdot \cos\theta, r \cdot \sin\theta)\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}(r \cdot \cos\theta, r \cdot \sin\theta)\right)^2 = \left(\frac{\partial F}{\partial r}(r, \theta)\right)^2 + \frac{1}{r^2} \cdot \left(\frac{\partial F}{\partial \theta}(r, \theta)\right)^2$$

Solution :

$$\frac{\partial F}{\partial r}(r, \theta) = \frac{\partial f}{\partial x}(r \cdot \cos\theta, r \cdot \sin\theta) \cdot \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y}(r \cdot \cos\theta, r \cdot \sin\theta) \cdot \frac{\partial y}{\partial r}$$
$$= \frac{\partial f}{\partial x}(r \cdot \cos\theta, r \cdot \sin\theta) \cdot \cos\theta + \frac{\partial f}{\partial y}(r \cdot \cos\theta, r \cdot \sin\theta) \cdot \sin\theta$$

$$\frac{\partial F}{\partial \theta}(r, \theta) = \frac{\partial f}{\partial x}(r \cdot \cos\theta, r \cdot \sin\theta) \cdot \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial f}{\partial y}(r \cdot \cos\theta, r \cdot \sin\theta) \cdot \frac{\partial y}{\partial \theta}$$
$$= \frac{\partial f}{\partial x}(r \cdot \cos\theta, r \cdot \sin\theta) \cdot (-r \cdot \sin\theta) + \frac{\partial f}{\partial y}(r \cdot \cos\theta, r \cdot \sin\theta) \cdot r \cdot \cos\theta$$

Nous pouvons aisément prouver la relation demandée en utilisant la relation
$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.