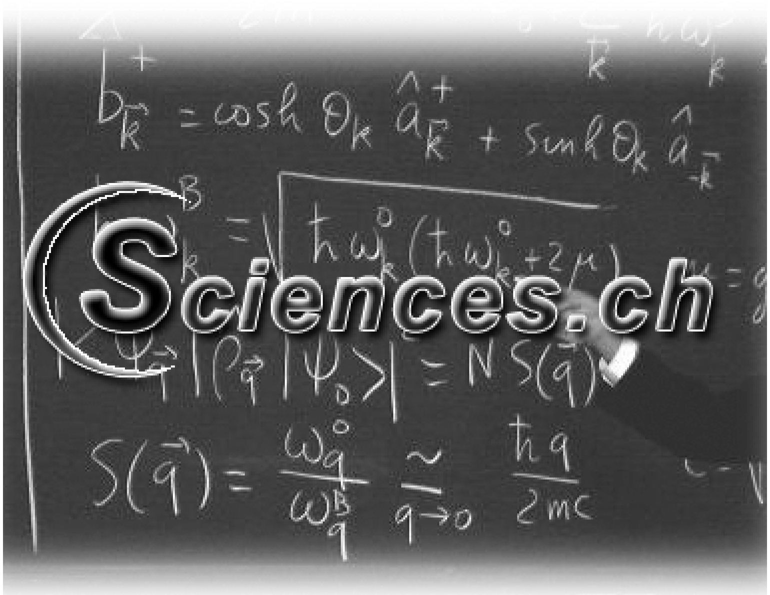

EXERCICES DE

ANALYSE FONCTIONNELLE

EXERCICE 1.

Niveau : Deuxième Cycle
Auteur : Ruben Ricchiuto (30.12.04)
Mots Clés : Caractères, produit de convolution, transformée de Fourier

---

Énoncé :

Soit G un groupe abélien fini. On note $\mathbb{C}^G$ l'algèbre des applications de $G \to \mathbb{C}$.

1. On défini un produit scalaire sur $\mathbb{C}^G$ par $\langle f,h\rangle = \dfrac{1}{|G|}\sum_{g\in G} f(g)\cdot\overline{h(g)}$. Montrer que l'ensemble des caractères $\widehat{G}$ forme une base orthonormale de $\mathbb{C}^G$. (On rappelle que pour G abélien fini on a $G \simeq \widehat{G}$ et donc $|G| = |\widehat{G}|$)

2. On définit le produit de convolution de deux éléments de $\mathbb{C}^G$ par $f*h(x) = \sum_{g\in G} f(g)\cdot h(g^{-1}x)$. Avec ce produit $(\mathbb{C}^G,+,*)$ est une $\mathbb{C}-$algèbre commutative. On définit la transformée de Fourier $\mathcal{F}:\mathbb{C}^G \to \mathbb{C}^{\widehat{G}}$ par: $\mathcal{F}(f)(\chi) := \sum_{g\in G} f(g)\cdot\chi(g)$. Montrer que $\mathcal{F}$ est un isomorphisme de $(\mathbb{C}^G,+,*)$ dans $(\mathbb{C}^{\widehat{G}},+,\cdot)$ où $\cdot$ est le produit habituel entre deux fonctions.

Solution :

1. Soit χ,θ deux caractères distincts. $\langle\chi,\theta\rangle = \dfrac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi(g)\cdot\overline{\theta(g)}$. Soit $g_0 \in G$ tel que $\chi(g_0) \neq \theta(g_0)$ on a
$$\langle\chi,\theta\rangle = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi(g\cdot g_0)\cdot\overline{\theta(g\cdot g_0)} = \frac{1}{|G|}\chi(g_0)\cdot\overline{\theta(g_0)}\sum_{g\in G}\chi(g)\cdot\overline{\theta(g)}$$ et donc
$$\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi(g)\cdot\overline{\theta(g)} = \frac{1}{|G|}\chi(g_0)\cdot\overline{\theta(g_0)}\sum_{g\in G}\chi(g)\cdot\overline{\theta(g)}$$ ce qui entraîne
$$\sum_{g\in G}\chi(g)\cdot\overline{\theta(g)}\left(\chi(g_0)\cdot\overline{\theta(g_0)}-1\right) = 0$$. Or $\chi(g_0)\cdot\overline{\theta(g_0)} = \chi(g_0)/\theta(g_0) \neq 1$ donc
$$\sum_{g\in G}\chi(g)\cdot\overline{\theta(g)} = 0$$ ce qui prouve que les caractères sont orthogonaux. De plus
$$\langle\chi,\chi\rangle = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}|\chi(g)|^2 = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}1 = 1$$. Pour finir, pour G abélien fini, $\dim(\mathbb{C}^G) = |G| = |\widehat{G}|$ donc $\widehat{G}$ est une base orthonormale de $\mathbb{C}^G$.

2. $\mathcal{F}$ est évidemment une application linéaire. Montrons que $\mathcal{F}$ est un morphisme. Soit $f,h\in\mathbb{C}^G$. $\mathcal{F}(f*h)(\chi) = \sum_{g\in G}(f*h)(g)\cdot\chi(g) = \sum_{g\in G}\sum_{x\in G} f(x)\cdot h(x^{-1}g)\cdot\chi(g)$ avec le changement de variable $x^{-1}g = u$ l'expression précédente devient:

$$\mathcal{F}(f*h)(\chi)=\sum_{u\in G}\sum_{x\in G} f(x)\cdot h(u)\cdot\chi(x)\cdot\chi(u)$$

$$=\left(\sum_{x\in G} f(x)\cdot\chi(x)\right)\cdot\left(\sum_{u\in G} h(u)\chi(u)\right)=\mathcal{F}(f)(\chi)\cdot\mathcal{F}(h)(\chi).$$

Montrons que $\mathcal{F}$ est un isomorphisme. Soit $f\in\mathbb{C}^G$. Par 1, $\widehat{G}$ est une base orthonormale de $\mathbb{C}^G$. Donc $f=\sum_{\chi\in\widehat{G}}\langle f,\chi\rangle\cdot\chi$. Par suite

$f=\sum_{\chi\in\widehat{G}}\langle f,\chi\rangle\cdot\chi=\frac{1}{|G|}\sum_{\chi\in\widehat{G}}\mathcal{F}(f)(\chi^{-1})\cdot\chi$ (car $\langle f,\chi\rangle=|G|^{-1}\cdot\mathcal{F}(f)(\chi^{-1})$). $\mathcal{F}$ est injective car si $\mathcal{F}(f)=0$ la formule ci-dessus montre que $f=0$. $\mathcal{F}$ est surjective car si $F\in\mathbb{C}^{\widehat{G}}$ alors en définissant $f\in\mathbb{C}^G$ par $f=\frac{1}{|G|}\sum_{\chi\in\widehat{G}}F(\chi^{-1})\cdot\chi$ on a:

$\mathcal{F}(f)=\frac{1}{|G|}\sum_{\chi\in\widehat{G}}F(\chi^{-1})\cdot\mathcal{F}(\chi)$. Un développement rapide montre que pour tout caractères χ,φ, $\mathcal{F}(\chi)(\varphi)=|G|$ si $\chi=\varphi^{-1}$ et 0 sinon. Donc

$\mathcal{F}(f)(\varphi)=\frac{1}{|G|}\sum_{\chi\in\widehat{G}}F(\chi^{-1})\cdot\mathcal{F}(\chi)(\varphi)=F(\varphi)$ c'est-à-dire $\mathcal{F}(f)=F$.

Niveau : Premier Cycle
Auteur : Ruben Ricchiuto (18.05.05, ruben@sciences.ch)
Mots Clés : Irrationalité de *e*

Énoncé :

Démontrer que e est irrationnel. [Indication: utiliser les suites a_n et b_n suivantes $a_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ et $b_n = a_n + \frac{1}{n \cdot n!}$ ($n > 0$). Montrer que $a_n < e < b_n$, ensuite supposer que $e = p/q$ et regarder ce qui se passe lorsque $n = q$].

Solution :

$e = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}$, donc (a_n) est une suite strictement croissante qui tend vers *e*. Montrons que (b_n) est strictement décroissante. En effet on a la suite d'équivalences

$$b_n > b_{n+1} \Leftrightarrow a_n + \frac{1}{n \cdot n!} > a_{n+1} + \frac{1}{(n+1) \cdot (n+1)!} \Leftrightarrow \frac{1}{n \cdot n!} > \frac{1}{(n+1)!} \cdot \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{n+1}{n} > 1 + \frac{1}{n+1} \Leftrightarrow 1 > \frac{n}{n+1} \Leftrightarrow n+1 > n.$$

De plus (b_n) tend vers *e*, on a donc $a_n < e < b_n$. Supposons que *e* soit rationnel, $e = \frac{p}{q}$, alors $a_q < \frac{p}{q} < a_q + \frac{1}{q \cdot q!}$ entraîne $q \cdot q! \cdot a_q < p \cdot q! < q \cdot q! \cdot a_q + 1$ mais $q \cdot q! \cdot a_q$ est un entier, $p \cdot q!$ serait donc compris entre deux entiers consécutifs, absurde.

EXERCICE 2.

Niveau : Deuxième Cycle
Auteur : Ruben Ricchiuto (18.05.05, ruben@sciences.ch)
Mots Clés : Espaces $\ell_{\mathbb{C}}^{p}$

Énoncé :

E1 : Démontrer que pour ($1 \leq p < q \leq +\infty$), $\ell_{\mathbb{C}}^{p} \subseteq \ell_{\mathbb{C}}^{q}$ mais que l'inclusion $i : \ell_{\mathbb{C}}^{p} \to \ell_{\mathbb{C}}^{q}$ n'est pas une isométrie.

Rappel : pour $1 \leq p < +\infty$, $\ell_{\mathbb{C}}^{p}$ est l'espace des suites $(x_n)_{\mathbb{N}^*}$ à valeurs complexes vérifiant $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < +\infty$, muni de la norme $\|x\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\right)^{1/p}$. $\ell_{\mathbb{C}}^{\infty}$ est l'espace des suite bornées, c'est-à-dire $\sup_n |x_n| < +\infty$, muni de la norme $\|x\|_\infty = \sup_n |x_n|$.

E2 : Quelle est l'adhérence de $\ell_{\mathbb{C}}^{p}$ $1 \leq p < +\infty$ dans $\ell_{\mathbb{C}}^{\infty}$?

Solution:

S1 : Si $x = (x_n)_{\mathbb{N}} \in \ell_{\mathbb{C}}^{p}$ alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq N \Rightarrow |x_n| < 1$. Donc pour $n \geq N$, $|x_n|^q \leq |x_n|^p$ et si $k \geq N$, $\sum_{N}^{k} |x_n|^q \leq \sum_{N}^{k} |x_n|^p \leq \|x\|_p^p$ ce qui implique $\sum_{0}^{+\infty} |x_n|^q \in \mathbb{R}$ et $x \in \ell_{\mathbb{C}}^{q}$. Soit $x = (1,1,0,0,...) \in \ell_{\mathbb{C}}^{p}$ alors si $q < +\infty$, $\|i(x)\|_q = 2^{1/q} \neq \|x\|_p = 2^{1/p}$ et si $q = +\infty$, $\|i(x)\|_q = 1 \neq \|x\|_p = 2^{1/p}$ ce qui montre que *i* n'est pas une isométrie.

S2 : Notons c_0 l'espace des suite qui tendent vers zéro. $c_0 \subset \overline{\ell_{\mathbb{C}}^{p}}$ en effet soit $x \in c_0$ et notons e_n la suite valant 1 en *n* et zéro ailleurs. Considérons $s_n = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \in \ell_{\mathbb{C}}^{p}$.

$\|x - s_n\|_\infty = \sup\{|x_i| \mid i > n\} \to 0$ si $n \to +\infty$ car $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$. Par conséquent, $c_0 \subset \overline{\ell_{\mathbb{C}}^{p}}$. c_0 est fermé. En effet, soit $x = (x_n)_{\mathbb{N}} \in \overline{c_0}$ et $(y_n)_{\mathbb{N}}$ une suite avec $y_n \in c_0$ et $\lim_{n\to\infty} y_n = x$ dans $\ell_{\mathbb{C}}^{\infty}$. Notons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $y_n = (y_n^1, y_n^2, ...)$ où $\forall j \in \mathbb{N}^*$, $y_n^j \in \mathbb{C}$. Soit $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq N \Rightarrow \|x - y_n\|_\infty \leq \varepsilon/2$. De plus, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $j \geq k \Rightarrow |y_N^j| \leq \varepsilon/2$. Par suite, pour $j \geq k$, $|x_j| \leq |x_j - y_N^j| + |y_N^j| \leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$. Donc $x \in c_0$. Pour finir,
$\ell_{\mathbb{C}}^{p} \subset c_0 \Rightarrow \overline{\ell_{\mathbb{C}}^{p}} \subset c_0$ et donc $\overline{\ell_{\mathbb{C}}^{p}} = c_0$.

EXERCICE 3.

Niveau : Deuxième Cycle
Auteur : Ruben Ricchiuto (18.05.05, ruben@sciences.ch)
Mots Clés : Espaces $\ell^p_{\mathbb{C}}$, dual

Énoncé :

E1 : Soit $x=(x_n)_{\mathbb{N}^*}\in\ell^p$ et $y=(y_n)_{\mathbb{N}^*}\in\ell^q$ avec $1/p+1/q=1$ et $1<p<+\infty$ (on dit que *p* et *q* sont conjugués) . Montrer l'inégalité de Hölder qui dit que $\sum_{i=1}^{\infty}|x_iy_i|\le\|x\|_p\|y\|_q$ où $\|\ \|_p$ et $\|\ \|_q$ sont les normes habituelles sur ℓ^p et ℓ^q respectivement. [Indication : considérer la fonction $f:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$ définie par $f(t)=t^p/p+t^{-q}/q$ et montrer que $f\ge 1$ puis remplacer *t* par $t=\dfrac{|x_i|^{1/q}}{|y_i|^{1/p}}\cdot\dfrac{\|y\|_q^{1/p}}{\|x\|_p^{1/q}}$ pour obtenir l'inégalité $\dfrac{|x_iy_i|}{\|x\|_p\|y\|_q}\le\dfrac{|x_i|^p}{p\cdot\|x\|_p^p}+\dfrac{|y_i|^q}{q\cdot\|y\|_q^q}$ et conclure.]

E2 : Montrer que dans les mêmes conditions d'avant, le dual de ℓ^p est isométrique à ℓ^q. [Indication : montrer que $\varphi:\ell^q\to\left(\ell^p\right)^*$ définie par $\varphi(y)(x)=\sum_{i=1}^{\infty}x_iy_i$ est une isométrie surjective.]

Solution :

S1 : Considérons la fonction *f* de l'indication. La dérivée $f'(t)=t^{p-1}-t^{-(q+1)}$ montre que *f* est croissante sur $[1,+\infty[$ et décroissante sur $]0,1]$. Donc $f\ge 1$. Si $\|x\|_p$ ou $\|y\|_q=0$ l'inégalité de Hölder est vraie nous pouvons donc supposer que $\|x\|_p,\|y\|_q\ne 0$. Pour $t=\dfrac{|x_i|^{1/q}}{|y_i|^{1/p}}\cdot\dfrac{\|y\|_q^{1/p}}{\|x\|_p^{1/q}}$ (on suppose $y_i\ne 0$) nous obtenons, $\dfrac{|x_i|^{p/q}}{p\cdot|y_i|}\cdot\dfrac{\|y\|_q}{\|x\|_p^{p/q}}+\dfrac{|x_i|^{-1}}{q\cdot|y_i|^{-q/p}}\cdot\dfrac{\|y\|_q^{-q/p}}{\|x\|_p^{-1}}\ge 1$ et après simplification, $\dfrac{|x_iy_i|}{\|x\|_p\|y\|_q}\le\dfrac{|x_i|^p}{p\cdot\|x\|_p^p}+\dfrac{|y_i|^q}{q\cdot\|y\|_q^q}$ cette inégalité reste vraie si $y_i=0$. En sommant à gauche et à droite, $\dfrac{1}{\|x\|_p\|y\|_q}\cdot\sum_{i=1}^{N}|x_iy_i|\le\dfrac{\sum_{i=1}^{N}|x_i|^p}{p\cdot\|x\|_p^p}+\dfrac{\sum_{i=1}^{N}|y_i|^q}{q\cdot\|y\|_q^q}\le\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$ donc $\sum_{i=1}^{N}|x_iy_i|\le\|x\|_p\|y\|_q$ et par suite, $\sum_{i=1}^{\infty}|x_iy_i|\le\|x\|_p\|y\|_q$.

S2 : Considérons l'application linéaire $\varphi : \ell^q \to \left(\ell^p\right)^*$ définie par $\varphi(y)(x) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i$. φ est une isométrie. En effet, soit $y \in \ell^q$, $\forall x \in \ell^p$, $\left|\varphi(y)(x)\right| = \left|\sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i\right| \leq \sum_{i=1}^{\infty} \left|x_i y_i\right| \leq \|x\|_p \|y\|_q$ donc $\|\varphi(y)\| \leq \|y\|_q$. Soit la suite $x = \left(x_n\right)_{\mathbb{N}^*}$ définie par $x_i = \dfrac{|y_i|^q}{y_i}$ si $y_i \neq 0$ et 0 sinon. $x \in \ell^p$ et $\|x\|_p^p = \|y\|_q^q$, car $\sum_1^N |x_i|^p = \sum_1^N |y_i|^{(q-1)p} = \sum_1^N |y_i|^q$ (car $(q-1)p = q$). $\|x\|_p = \|y\|_q^{q/p} = \|y\|_q^{q-1}$ donc

$$\frac{\left|\varphi(y)(x)\right|}{\|x\|_p} = \frac{\sum_{i=1}^{\infty} |y_i|^q}{\|y\|_q^{q-1}} = \frac{\|y\|_q^q}{\|y\|_q^{q-1}} = \|y\|_q$$

et par conséquent, $\|\varphi(y)\| \geq \|y\|_q$. Donc $\|\varphi(y)\| = \|y\|_q$ et φ est une isométrie. Montrons que φ est surjective. Soit $\xi \in \left(\ell^p\right)^*$ et notons e_n la suite valant 1 en n et 0 ailleurs. Soit $x \in \ell^p$, on vérifie facilement que la suite $\sum_{i=1}^{N} x_i e_i$ tend vers x et donc,

$$\xi(x) = \xi\left(\sum_{i=1}^{\infty} x_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \xi(e_i)$$

. Il est donc naturel de poser $y = \left(y_n\right)_{\mathbb{N}^*}$ avec $y_i = \xi(e_i)$. Il suffit de montrer que $y \in \ell^q$ car alors $\varphi(y) = \xi$. Soit $g_n = \sum_{i=1}^{n} |y_i| \cdot \delta_i \cdot e_i$ avec $\delta_i = |y_i| / y_i$ si $y_i \neq 0$ et 0 sinon. $\|g_n\|_q^q = \sum_{i=1}^{n} |y_i|^q = \sum_{i=1}^{n} |y_i|^{q-1} |y_i| = \xi\left(g_n^{q-1}\right)$ où $g_n^{q-1} = \sum_{i=1}^{n} |y_i|^{q-1} \cdot \delta_i \cdot e_i$. Or,

$$\xi\left(g_n^{q-1}\right) = \left|\xi\left(g_n^{q-1}\right)\right| \leq \|\xi\| \cdot \left\|g_n^{q-1}\right\|_p = \|\xi\| \cdot \|g_n\|_q^{q-1}$$

. Donc, $\|g_n\|_q = \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^q\right)^{1/q} \leq \|\xi\|$ et $y \in \ell^q$.

EXERCICE 4.

Niveau : Deuxième Cycle
Auteur : Ruben Ricchiuto (18.05.05, ruben@sciences.ch)
Mots Clés : Théorème de Dini

Énoncé :

Démontrer le théorème de Dini dont l'énoncé est le suivant: soit X un espace topologique compact et $f_n : X \to \mathbb{R}$ une suite de fonctions monotone (i.e $\forall x \in X, \forall n \in \mathbb{N}, f_n(x) R f_{n+1}(x)$ avec $R \in \{\leq, \geq\}$) convergeant ponctuellement vers une fonction f continue ($\forall x \in X, \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$). Alors (f_n) tend vers f uniformément.

[Indication: supposer que (f_n) est croissante et considérer les ensembles $F_n = \{x \in X \mid f(x) - f_n(x) \geq \varepsilon\}$. Utiliser la caractérisation suivante d'un compact: X est compact ssi pour toute famille $(F_i)_{i\in I}$ de fermés de X d'intersection vide ($\bigcap\limits_I F_i = \varnothing$) il existe $J \subseteq I$ fini tel que $\bigcap\limits_J F_i = \varnothing$.]

Solution :

Pour $\varepsilon > 0$ donné on considère les ensembles $F_n = \{x \in X \mid f(x) - f_n(x) \geq \varepsilon\}$. Les F_n forment une suite décroissante de fermés. En effet, $f - f_n$ étant continue et $[\varepsilon, +\infty[$ étant fermé, $F_n = (f - f_n)^{-1}([\varepsilon, +\infty[)$ est fermé. Pour $x \in X$, il existe un entier N tel que $f(x) - f_n(x) < \varepsilon$ pour tout $n \geq N$ (convergence ponctuelle) donc $x \notin F_N$ et par suite $\bigcap\limits_{n\geq 1} F_n = \varnothing$. X étant compact, il existe un entier $m \geq 1$ tel que $\bigcap\limits_{n=1}^{m} F_n = \varnothing$ mais $\bigcap\limits_{n=1}^{m} F_n = F_m$ donc pour tout $k \geq m$, $F_k = \varnothing$ ce qui signifie $\forall k \geq m, \forall x \in X, f(x) - f_k(x) < \varepsilon$.

Si (f_n) est décroissante on considère la suite croissante $(-f_n)$.

EXERCICE 5.

Niveau : Deuxième Cycle
Auteur : Ruben Ricchiuto (18.05.05, ruben@sciences.ch)
Mots Clés : Séparabilité

Énoncé :

Soit (E,d) un espace métrique. On dit que (E,d) est séparable s'il existe une partie $A \subset E$ dénombrable et dense. Démontrer que si (E,d) est séparable alors toute partie $X \subset E$ est séparable (pour la distance induite).

Solution :

Soit $A = \{a_1, a_2, ...\} \subset E$ dénombrable et dense. Soit $X \subset E$. Posons, pour tout entiers $n, m \geq 1$, $B_{n,m} := B(a_n, 1/m) \cap X$ ($B(a_n, 1/m)$ est la boule ouverte de rayon $1/m$ centrée en a_n) et soit $J = \{(n,m) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \mid B_{n,m} \neq \varnothing\}$. $J \neq \varnothing$ car *A* est dense dans *E*. Choisissons un élément $x_{n,m} \in B_{n,m}$ pour tout $(n,m) \in J$. L'ensemble $B = \{x_{n,m} \mid (n,m) \in J\}$ est dénombrable, montrons qu'il est dense dans *X*. Soit $x \in X$ et $m > 0$, il existe $a_j \in A$ tel que $d(a_j, x) < 1/m$ donc $x \in B_{j,m}$ et par suite $d(x_{j,m}, a_j) < 1/m$ enfin $d(x, x_{j,m}) \leq d(x, a_j) + d(a_j, x_{j,m}) < 2/m$.

EXERCICE 6.

Niveau : Deuxième Cycle
Auteur : Ruben Ricchiuto (18.05.05, ruben@sciences.ch)
Mots Clés : Prolongements

Énoncé:

E1 : Soit (X,d) et (Y,δ) deux espaces métriques et A une partie dense de *X*. Soit de plus $f,g:X\to Y$ deux applications continues vérifiant $\forall x\in A, f(x)=g(x)$. Démontrer que $f=g$.

E2 : On reprend les notations de 1. Trouver un exemple qui montre que sans hypothèses supplémentaires, une fonction continue $h:A\to Y$ n'admet pas en général un prolongement continu à *X*.

E3 : Toujours avec les mêmes notations, on suppose que $h:A\to Y$ est uniformément continue et que *Y* est complet. Démontrer que *h* admet un unique prolongement et que ce prolongement est uniformément continu.

Solution :

S1 : Pour $x\in X$, il existe une suite (x_n) d'éléments de *A* qui converge vers *x* (car *A* est dense). Donc $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=\lim\limits_{n\to\infty} g(x_n)=g(x)$.

S2 : Pour $X=[0,+\infty[$ et $A=]0,+\infty[$, la fonction continue $h:A\to\mathbb{R}, x\mapsto 1/x$ n'admet pas de prolongement continu à *X*.

S3 : Soit $x\in X$ et (x_n) une suite d'éléments de *A* qui converge vers *x*. La suite $h(x_n)$ est de Cauchy. En effet *h* étant uniformément continue on a:
$\forall\varepsilon>0,\exists\eta>0$ tel que $\forall u,v\in A, d(u,v)\leq\eta\Rightarrow\delta(h(u),h(v))\leq\varepsilon$. (x_n) convergeant vers *x*, il existe $N\in\mathbb{N}$ tel que $\forall n,m\geq N, d(x_n,x_m)\leq\eta$ et donc $\delta(h(x_n),h(x_m))\leq\varepsilon$ pour $n,m\geq N$. *Y* étant complet $h(x_n)$ converge. Posons $\tilde{h}(x):=\lim\limits_{n\to\infty} h(x_n)$. $\tilde{h}(x)$ ne dépend pas de la suite (x_n) car si (x_n') est une autre suite d'éléments de *A* qui converge vers *x* alors $d(x_n,x_n')\leq d(x_n,x)+d(x,x_n')\leq\eta$ pour *n* assez grand et par suite $\delta(h(x_n),h(x_n'))\leq\varepsilon$, enfin l'inégalité triangulaire $\delta(h(x_n'),\lim\limits_{n\to\infty} h(x_n))\leq\delta(h(x_n),h(x_n'))+\delta(h(x_n),\lim\limits_{n\to\infty} h(x_n))$ prouve que $\lim\limits_{n\to\infty} h(x_n')=\lim\limits_{n\to\infty} h(x_n)$. $\tilde{h}$ prolonge *h*. Montrons que $\tilde{h}$ est uniformément continue. Soit $\varepsilon>0$, il existe $\eta>0$ tel que $\forall u,v\in A, d(u,v)\leq\eta\Rightarrow\delta(\tilde{h}(u),\tilde{h}(v))\leq\varepsilon$. Soit $u,v\in X$ tels que $d(u,v)\leq\eta/2$ et $(u_n),(v_n)$ deux suites d'éléments de *A* convergeant vers *u* respectivement *v*. On a $d(u_n,v_n)\leq d(u_n,u)+d(u,v)+d(v,v_n)\leq\eta/2+\eta/2=\eta$ pour *n* assez grand et par conséquent $\delta(\tilde{h}(u_n),\tilde{h}(v_n))\leq\varepsilon$ (*). Or $\tilde{h}(u_n)=h(u_n)$ tend vers $\tilde{h}(u)$ idem pour $\tilde{h}(v_n)$ et donc $\delta(\tilde{h}(u_n),\tilde{h}(v_n))\to\delta(\tilde{h}(u),\tilde{h}(v))$, (*) entraîne $\delta(\tilde{h}(u),\tilde{h}(v))\leq\varepsilon$ ce qui prouve que $\tilde{h}$ est uniformément continue. L'unicité de $\tilde{h}$ suit de 1.

EXERCICE 7.

Niveau : Deuxième Cycle
Auteur : Ruben Ricchiuto (18.05.05, ruben@sciences.ch)
Mots Clés : Isométrie entre $\left(\ell^1_{\mathbb{C}}\right)^*$ et $\ell^\infty_{\mathbb{C}}$

Énoncé :

E1 : Montrer que $\left(\ell^1_{\mathbb{C}}\right)^*$ et $\ell^\infty_{\mathbb{C}}$ sont isométriques (où $\left(\ell^1_{\mathbb{C}}\right)^*$ est le dual topologique de ℓ^1)

[Indication: montrer que l'application $\varphi:\left(\ell^1\right)^* \to \ell^\infty, \xi \mapsto (\xi(e_n))$ est une isométrie surjective où e_n est la suite qui vaut 1 en *n* et 0 ailleurs.]

E2 : Notant $c_0(\mathbb{C})$ le sous-espace de $\ell^\infty_{\mathbb{C}}$ constitué des suites qui convergent vers zéro, montrer que c_0^* et ℓ^1 sont isométriques. [Indication: montrer que l'application $\varphi:\ell^1 \to c_0^*, a \mapsto \xi_a$ où $\xi_a(x) = \sum_1^{+\infty} a_k \cdot x_k$ est une isométrie surjective].

Solution :

S1 : On considère l'application linéaire $\varphi:\left(\ell^1\right)^* \to \ell^\infty, \xi \mapsto (\xi(e_n))$. Montrons pour commencer qu'elle est bien définie c'est-à-dire que $(\xi(e_n)) \in \ell^\infty$. En effet pour tout $k \geq 1$, $|\xi(e_k)| \leq \|\xi\|$ ce qui entraîne $\sup_k |\xi(e_k)| \leq \|\xi\|$ et donc $(\xi(e_n)) \in \ell^\infty$. Si $x = (x_1, x_2, ...) \in \ell^1$ alors $\left\|\sum_1^n x_i e_i - x\right\|_1 = \sum_{k=n+1}^{\infty} |x_k| \to 0$ si $n \to +\infty$ (car $\sum_1^\infty |x_k| < +\infty$) ainsi $\sum_1^n x_i e_i \to x$ dans ℓ^1 et pour $\xi \in \left(\ell^1\right)^*, \xi\left(\sum_1^n x_i e_i\right) \to \xi(x)$ c'est-à-dire $\sum_1^\infty x_i \xi(e_i) = \xi(x)$. A présent montrons que φ est une isométrie. On a d'une part $\forall \xi \in \left(\ell^1\right)^*, \|\varphi(\xi)\| = \sup_k |\xi(e_k)| \leq \|\xi\|$, d'autre part

$|\xi(x)| = \left|\sum_1^\infty x_i \xi(e_i)\right| \leq \sum_1^\infty |x_i| \cdot |\xi(e_i)| \leq \sup_i |\xi(e_i)| \cdot \sum_1^\infty |x_i| = \|x\|_1 \cdot \sup_i |\xi(e_i)|$ ce qui entraîne $\|\xi\| \leq \sup_i |\xi(e_i)|$ et donc $\|\xi\| = \sup_i |\xi(e_i)|$. Pour finir, $\|\varphi(\xi)\| = \sup_i |\xi(e_i)| = \|\xi\|$. Il ne reste qu'à montrer que φ est surjective. Soit $a = (a_1, a_2, ...) \in \ell^\infty$, on a pour tout $x \in \ell^1$,

$\left|\sum_{k=1}^n a_k \cdot x_k\right| \leq \sum_{k=1}^n |a_k| \cdot |x_k| \leq \|a\|_\infty \cdot \|x\|_1$ ce qui montre que $\sum_{k=1}^\infty a_k \cdot x_k$ existe. Posons $\xi : \ell^1 \to \mathbb{C}$, $\xi(x) := \sum_1^\infty a_k \cdot x_k$. $\xi \in \left(\ell^1\right)^*$ et $\varphi(\xi) = a$.

S2 : Considérons l'application φ de l'indication. Elle est bien définie car si $x \in c_0(\mathbb{C})$ alors à partir d'un certain *N*, $|x_n| < 1$ et donc pour tout $a \in \ell^1$, $\sum_{k=N}^{\infty} |a_k \cdot x_k| \leq \sum_{k=N}^{\infty} |a_k| < +\infty$. Montrons que φ est une isométrie. $|\xi_a(x)| = \left|\sum_1^{\infty} a_k \cdot x_k\right| \leq \sum_1^{\infty} |a_k \cdot x_k| \leq \|x\|_{\infty} \cdot \sum_1^{\infty} |a_k| = \|x\|_{\infty} \cdot \|a\|_1$ entraîne $\|\xi_a\| \leq \|a\|_1$. De plus, considérons la suite $x_n = (x_n^1, x_n^2, ..., x_n^n, 0, 0...) \in c_0$ avec $x_n^k = |a_k| / a_k$ si $a_k \neq 0$ et 0 sinon. $|\xi_a(x_n)| = \sum_1^n |a_k| \to \|a\|_1$ lorsque $n \to \infty$. Donc $\|\varphi(a)\| = \|\xi_a\| = \|a\|_1$. φ est surjective car soit $\xi \in c_0^*$ et $a = (\xi(e_n))_{\mathbb{N}^*}$. Considérons la suite $x_n = (x_n^1, x_n^2, ..., x_n^n, 0, 0, ...)$ avec $x_n^k = |\xi(e_k)| / \xi(e_k)$ si $\xi(e_k) \neq 0$ et 0 sinon. Alors, $\xi(x_n) = \sum_{k=1}^{n} x_n^k \xi(e_k) = \sum_{k=1}^{n} |\xi(e_k)| \leq \|\xi\|$ ce qui prouve que $a \in \ell^1$. Pour finir, pour tout $x \in c_0$, $\varphi(a)(x) = \sum_1^{\infty} a_n x_n = \sum_1^{\infty} \xi(e_n) x_n = \xi(x)$. La dernière égalité découle du fait que $x = \sum_1^{\infty} x_n e_n$ dans c_0 et ξ est bornée. Donc $\varphi(a) = \xi$.

EXERCICE 8.

Niveau : Deuxième Cycle
Auteur : Ruben Ricchiuto (18.05.05, ruben@sciences.ch)
Mots Clés : Séparabilité

Énoncé :

Démontrer que les espaces $\ell^p_{\mathbb{C}}$ ($1 \leq p < +\infty$) sont séparables. Démontrer que ℓ^∞ n'est pas séparable. [Indication: montrer qu'il existe un ensemble non dénombrable $E \subseteq \ell^\infty$ tel que pour tout $x \neq y \in E, \|x\| = 1$ et $\|x - y\| = 1$].

Solution :

L'ensemble $E := \left\{ x \in \ell^p \mid x_n = 0 \text{ à partir d'un certain } n \right\}$ est dense dans ℓ^p. En effet si $x \in \ell^p, x = \sum_1^\infty x_k \cdot e_k$ (où e_k est la suite qui vaut 1 en k et 0 ailleurs) car

$$\left\| x - \sum_1^n x_k \cdot e_k \right\|_p = \left(\sum_{k=n+1}^\infty |x_k|^p \right)^{1/p} \to 0 \text{ si } n \to +\infty$$

. Or $\sum_1^n x_k \cdot e_k \in E$. On considère le sous-ensemble $A \subseteq E$ constitué par les éléments $x = (x_1, x_2, ..., x_n, 0, ...) \in E$ tels que $x_k = a_k + ib_k$ avec $a_k, b_k \in \mathbb{Q}$. La densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ entraîne la densité de *A* dans *E*, et par suite la densité de *A* dans ℓ^p. Nous venons de montrer que les espaces $\ell^p_{\mathbb{C}}$ ($1 \leq p < +\infty$) sont séparables. Montrons à présent que ce n'est pas le cas pour ℓ^∞. Considérons l'ensemble $E := \left\{ x \in \ell^\infty \mid \forall k \geq 1, x_k = 0 \text{ ou } x_k = 1 \right\}$, *E* n'est pas dénombrable et pour tout $x \in E, \|x\|_\infty = 1$. De plus $x \neq y \in E \Rightarrow \|x - y\| = 1$. Si ℓ^∞ est séparable il existe un ensemble $A = \{a_0, a_1, ...\}$ dénombrable et dense. Ainsi pour tout $x \in E$ il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $\|x - a_k\|_\infty \leq 1/3$. Considérons la famille $\mathcal{F}$ des boules fermées $B(x, 1/3]$ centrées en $x \in E$ quelconque et de rayon 1/3. Si $B \neq B' \in \mathcal{F}$, $B \cap B' = \varnothing$ car tous les éléments de *E* sont à distance 1 les uns des autres. Ceci nous permet de définir une application injective $\phi : \mathcal{F} \to A$ qui à chaque $B \in \mathcal{F}$ associe un élément $a \in B \cap A$. Mais ceci est impossible car $\mathcal{F}$ a le même cardinal de *E* et par conséquent n'est pas dénombrable.

EXERCICE 9.

Niveau : Deuxième Cycle
Auteur : Ruben Ricchiuto (18.05.05, ruben@sciences.ch)
Mots Clés : Séparabilité, espace dual

Énoncé :

E1 : Soit V un $\mathbb{C}-$espace vectoriel normé à base dénombrable. Montrer que V est séparable.

E2 : Montrer que si V est un espace vectoriel normé et V^* son dual alors V^* séparable entraîne V séparable. [Indication : si $\{\varphi_n\}_{\mathbb{N}}$ est une famille dénombrable et dense de V^* montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$ il existe une suite $\left(x_n^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ de V telle que $\left\|x_n^k\right\|\leq 1$ et $\lim\limits_{k\to\infty}\left|\varphi_n(x_n^k)\right|=\|\varphi_n\|$. Considérer alors l'espace W engendré par $\left\{x_n^k \mid (n,k)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}\right\}$, montrer que $\overline{W}$ est séparable et que $\overline{W}=V$.]

E3 : Déduire de 2. que $\left(\ell^\infty\right)^*\neq\ell_1$.

Solution :

S1 : Soit **Error! Objects cannot be created from editing field codes.** une base de V. Notons $V_n=\langle x_0,...,x_n\rangle$ l'espace engendré par $\{x_0,...,x_n\}$. Les espaces V_n sont séparables car de dimension finie. Soit $X_n\subset V_n$ une partie dénombrable et dense dans V_n. $V=\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}}V_n$, par suite $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}}X_n$ est dénombrable et dense dans V.

S2 : Soit $\{\varphi_n\}_{\mathbb{N}}$ une famille dénombrable et dense de V^*. $\|\varphi_n\|=\sup\limits_{\|x\|\leq 1}|\varphi_n(x)|$ donc il existe une suite $\left(x_n^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ de V telle que $\left\|x_n^k\right\|\leq 1$ et $\lim\limits_{k\to\infty}\left|\varphi_n(x_n^k)\right|=\|\varphi_n\|$. Notons $W=\left\langle\left\{x_n^k \mid (n,k)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}\right\}\right\rangle$ l'espace vectoriel engendré par $\left\{x_n^k \mid (n,k)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}\right\}$. W est à base dénombrable et par 1. il est séparable. Donc, $\overline{W}$ est séparable. En fait, $V=\overline{W}$. En effet supposons qu'il existe $x\in V\setminus\overline{W}$, nous définissons $\xi:\langle x\rangle\oplus\overline{W}\to\mathbb{C}$ par $\xi(x)=1$ et $\xi|_{\overline{W}}=0$. ξ est bornée car $\ker\xi=\overline{W}$ est fermé. Par Hahn-Banach ξ se prolonge à V tout en restant bornée. Par densité, il existe $n\in\mathbb{N}$ tel que $\|\xi-\varphi_n\|\leq\|\xi\|/3$. Donc pour tout $k\in\mathbb{N}$, $\left|\xi(x_n^k)-\varphi_n(x_n^k)\right|\leq\|\xi\|/3$ mais $\left|\xi(x_n^k)-\varphi_n(x_n^k)\right|=\left|\varphi_n(x_n^k)\right|$ ce qui entraîne $\lim\limits_{k\to\infty}\left|\varphi_n(x_n^k)\right|=\|\varphi_n\|\leq\|\xi\|/3$ et par suite $\|\xi\|=\|\xi-\varphi_n+\varphi_n\|\leq\|\xi-\varphi_n\|+\|\varphi_n\|\leq\dfrac{2}{3}\|\xi\|$ ce qui est absurde. Donc $V=\overline{W}$ et par conséquent V est séparable.

S3 : Si $\left(\ell^\infty\right)^*\simeq\ell^1$ alors $\left(\ell^\infty\right)^*$ est séparable car ℓ^1 l'est et par 2. ℓ^∞ serait séparable ce qui n'est pas le cas.

EXERCICE 10.

Niveau : Deuxième Cycle
Auteur : Ruben Ricchiuto (18.05.05, ruben@sciences.ch)
Mots Clés : Espaces réflexifs, bidual

Partie I

Énoncé :

E1 : Soit $(V,\|\,.\,\|)$ un espace vectoriel normé, réel ou complexe. On note $V^{**}:=\left(V^{*}\right)^{*}$ le bidual de V muni de la norme $\forall \varphi \in V^{**},\|\varphi\|=\sup\limits_{\xi \neq 0} \dfrac{|\varphi(\xi)|}{\|\xi\|}$. Montrer que l'application $\chi : V \rightarrow V^{**}$ définie par $\forall v \in V, \forall \xi \in V^{*}, \chi(v)(\xi)=\xi(v)$ est une isométrie linéaire. [Indication: utiliser le corollaire suivant du théorème de Hahn-Banach: pour tout $x \in V$ il existe une forme linéaire bornée ξ telle que $\xi(x)=\|x\|$ et $\|\xi\|=1$.]

E2 : Déduire de 1. que tout espace vectoriel normé V est isométrique à un sous-espace dense d'un espace complet (ce dernier espace est le complété de V).

E3 : On dit qu'un espace normé est réflexif si l'isométrie χ de1. est surjective. Est-ce qu'un espace non complet peut être réflexif? Montrer que tout espace de Hilbert est réflexif.

Solution :

S1 : χ est linéaire (facile). Montrons que χ est une isométrie.
$\forall v \in V, \forall \xi \in V^{*},\|\chi(v)(\xi)\|=|\xi(v)| \leq\|\xi\| \cdot\|v\|$ ce qui montre que $\|\chi(v)\| \leq\|v\|$. Soit $v \in V$, par Hahn-Banach, il existe une forme linéaire bornée ξ telle que $\xi(v)=\|v\|$ et $\|\xi\|=1$. Pour cette forme nous avons, $\|\chi(v)(\xi)\|=\|v\| \cdot\|\xi\|$ ainsi $\|\chi(v)\| \geq\|v\|$ et par suite $\|\chi(v)\|=\|v\|$. Donc, χ est une isométrie.

S2 : Soit V un espace normé. Nous savons que V^{*} est complet (cf. un cours) et par conséquent V^{**} aussi. Ainsi $\overline{\chi(V)}$ est complet (car fermé dans un complet) et $\chi(V)$ qui est isométrique à V est dense dans $\overline{\chi(V)}$.

S3 : Les espaces V réflexifs sont tous complets car isométriques à V^{**} qui est complet. Les espaces de Hilbert sont réflexifs. En effet soit $\left(V,\langle .|.\rangle\right)$ un espace de Hilbert. Par le théorème de Riesz, nous savons que l'application $\psi : V \rightarrow V^{*}, v \mapsto\langle .| v\rangle$ est une isométrie surjective (antilinéaire si le corps de base est $\mathbb{C}$). ψ nous permet ainsi de définir un produit scalaire sur V^{*}, noté encore $\langle .|.\rangle$, par $\forall \alpha, \beta \in V^{*},\langle\alpha | \beta\rangle=\left\langle\psi^{-1}(\beta) | \psi^{-1}(\alpha)\right\rangle$. Nous pouvons donc appliquer à nouveau le théorème de Riesz à V^{*} et V^{**} pour obtenir une isométrie surjective (antilinéaire si le corps de base est $\mathbb{C}$) $\phi : V^{*} \rightarrow V^{**}, \xi \mapsto\langle .| \xi\rangle$. L'isométrie $\phi \circ \psi : V \rightarrow V^{**}$ est donc surjective et pour tout $v \in V, \xi \in V^{*}, \phi(\psi(v))(\xi)=\langle\xi | \psi(v)\rangle=\left\langle\psi^{-1}(\xi) | v\right\rangle=\overline{\xi(v)}$. Ainsi $\phi \circ \psi=\overline{\chi}$ et χ est surjective.

EXERCICE 11.

Niveau : Deuxième Cycle
Auteur : Ruben Ricchiuto (18.05.05, ruben@sciences.ch)
Mots Clés : Espaces réflexifs

Partie II

Énoncé :

E1 : Montrer que pour $1 < p < +\infty$, ℓ^p est réflexif. [Rappel : on sait que $\varphi : \ell^p \to \left(\ell^q\right)^*$ définie par $\varphi(y)(x) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i$ est une isométrie surjective pour $1 < p < +\infty$ et *p*, *q* conjugués.]

E2 : Montrer que ℓ^1 n'est pas réflexif. [Rappels : ℓ^1 est séparable mais ℓ^∞ ne l'est pas. On a $\ell^\infty \simeq \left(\ell^1\right)^*$. Si V^* est séparable, V l'est aussi.]

Solution :

S1 : Soit $1 < p < +\infty$. Les applications $\varphi : \ell^p \to \left(\ell^q\right)^*$ et $\overline{\varphi} : \ell^q \to \left(\ell^p\right)^*$ définies par $\varphi(x)(y) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i$ et $\overline{\varphi}(y)(x) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i$ sont des isométries surjectives pour *p*, *q* conjugués. L'applications $\overline{\varphi}^* : \left(\ell^p\right)^{**} \to \left(\ell^q\right)^*$ définie par $\overline{\varphi}^*(\zeta) = \zeta \circ \overline{\varphi}$ est aussi une isométrie surjective ($\overline{\varphi}^*$ est la transposée de $\overline{\varphi}$). Considérons l'isométrie surjective $\left(\overline{\varphi}^*\right)^{-1} \circ \varphi : \ell^p \to \left(\ell^p\right)^{**}$. Il ne reste qu'à montrer que $\left(\overline{\varphi}^*\right)^{-1} \circ \varphi = \chi$ (cf. partie I). Soit $x \in \ell^p$ et $\xi \in \left(\ell^p\right)^*$, notons e_n la suite valant 1 en *n* et 0 ailleurs. On vérifie facilement que $\left(\overline{\varphi}\right)^{-1}(\xi) = \left(\xi(e_n)\right)_{\mathbb{N}^*}$. Nous avons alors $\left(\overline{\varphi}^*\right)^{-1}(\varphi(x))(\xi) = \left(\varphi(x) \circ \left(\overline{\varphi}\right)^{-1}\right)(\xi) = \varphi(x)\left(\xi(e_n)\right)_{\mathbb{N}^*} = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \xi(e_i)$. Mais cette dernière expression est égale à $\xi(x)$ car $x = \sum_{i=1}^{\infty} x_i e_i$ et ξ est continue. Donc $\left(\overline{\varphi}^*\right)^{-1} \circ \varphi = \chi$ et par suite, χ est surjective. Donc, pour $1 < p < +\infty$, ℓ^p est réflexif.

S2 : Supposons ℓ^1 réflexif. ℓ^1 séparable entraîne $\left(\ell^1\right)^{**}$ séparable. Donc $\left(\ell^1\right)^*$ est séparable et par suite ℓ^∞ aussi car $\ell^\infty \simeq \left(\ell^1\right)^*$, ce qui n'est pas le cas.

EXERCICE 12.

Niveau : Deuxième Cycle
Auteur : Ruben Ricchiuto (18.05.05, ruben@sciences.ch)
Mots Clés : Suites de Cauchy

Énoncé :

Nous considérons la suite $\left(f_n\right)_{\mathbb{N}^*}$ de fonctions continues sur $[0,1]$, définie par

$$f_n(x)=\begin{cases} 0 \text{ si } 0\leq x\leq 1/2-1/n \\ n\cdot x+1-1/2\cdot n \text{ si } 1/2-1/n\leq x\leq 1/2 \\ 1 \text{ si } 1/2\leq x\leq 1 \end{cases}.$$

Montrer que cette suite est de Cauchy mais ne converge pas dans l'espace $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ des fonctions continues sur $[0,1]$ muni de la norme $\forall f\in\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}),\|f\|_p=\left(\int_0^1|f(x)|^p\,dx\right)^{1/p}$ $(1\leq p<\infty)$.

Solution :

Remarquons que pour $m\leq n$, $f_n\leq f_m$. La suite $\left(f_n\right)_{\mathbb{N}^*}$ est donc décroissante.

$$\|f_n-f_m\|_p^p=\int_0^1\left(f_m(x)-f_n(x)\right)^p dx=\int_{1/2-1/m}^{1/2-1/n}\left(f_m(x)-f_n(x)\right)^p dx+\int_{1/2-1/n}^{1/2}\left(f_m(x)-f_n(x)\right)^p dx$$

$$=\int_{1/2-1/m}^{1/2-1/n}\left(m\cdot x+1-1/2\cdot m\right)^p dx+\int_{1/2-1/n}^{1/2}\left((1/2-x)(n-m)\right)^p dx=\frac{(n-m)^{p+1}}{(p+1)m\cdot n^{p+1}}+\frac{(n-m)^p}{(p+1)\cdot n^{p+1}}$$

$$=\frac{(n-m)^p}{(p+1)m\cdot n^p}$$. Donc,

$\|f_n-f_m\|_p=\dfrac{(n-m)}{(p+1)^{1/p}m^{1/p}\cdot n}=\dfrac{1}{(p+1)^{1/p}m^{1/p}}\left(1-\dfrac{m}{n}\right)\leq\dfrac{1}{(p+1)^{1/p}m^{1/p}}$. Ainsi pour $\varepsilon>0$, $m,n\geq\dfrac{1}{(p+1)\varepsilon^p}\Rightarrow\|f_n-f_m\|_p\leq\varepsilon$. $\left(f_n\right)_{\mathbb{N}^*}$ est donc une suite de Cauchy. Supposons que $\|f_n-f\|_p\to 0$ avec $f\in\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$. On a,

$\displaystyle\int_0^{1/2-1/n}|f_n(x)-f(x)|^p dx=\int_0^{1/2-1/n}|f(x)|^p dx\leq\|f_n(x)-f\|_p^p$ et pour $n\to+\infty$, nous obtenons,

$\displaystyle\int_0^{1/2}|f(x)|^p dx=0$ donc pour tout $x\in[0,1/2]$, $f(x)=0$. De la même manière,

$\displaystyle\int_{1/2}^1|f_n(x)-f(x)|^p dx=\int_{1/2}^1|1-f(x)|^p dx\leq\|f_n(x)-f\|_p^p$ et donc pour tout $x\in[1/2,1]$, $f(x)=1$.

Ainsi $0=f(1/2)=1$ ce qui est absurde.

EXERCICE 13.

Niveau : Deuxième Cycle
Auteur : Ruben Ricchiuto (18.05.05, ruben@sciences.ch)
Mots Clés : Produit de convolution et approximation de l'unité

Énoncé :

Nous rappelons que l'on dit que deux fonctions $f, g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ sont *convolables* si $\int f(x-y)g(y)dy$ existe pour presque tout $x \in \mathbb{R}^d$ et on note $f * g(x) = \int f(x-y)g(y)dy$ (on considère $\mathbb{R}^d$ muni de la mesure de Lebesgue λ). $*$ est appelé produit de convolution. On a le résultat suivant : si $f, g \in L^1(\lambda)$ alors *f* et *g* sont convolables, $f * g \in L^1(\lambda)$ et $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$. De plus, $\left(L^1(\lambda), +, *\right)$ est une $\mathbb{C}-$algèbre commutative. Le but de l'exercice est de montrer que cette algèbre n'est pas unitaire mais qu'elle possède des *unités approchées*.

On dit qu'une suite $(\phi_n)_\mathbb{N}$ d'éléments de $L^1(\lambda)$, est une *approximation de l'unité* (on dit aussi suite de Dirac) si elle vérifie les deux conditions suivantes :

- $\forall n \in \mathbb{N}, \phi_n \geq 0$ et $\int \phi_n(x)dx = 1$
- $\forall r > 0, \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_{\{\|x\| > r\}} \phi_n(x)dx = 0$

E1 : Donner un exemple d'approximation de l'unité.

E2 : Montrer que si $\phi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}_+$ vérifie $\int \phi(x)dx = 1$ alors $\phi_n(x) = n^d \phi(n \cdot x)$ est une approximation de l'unité.

E3 : Soit $(\phi_n)_\mathbb{N}$ une approximation de l'unité. Montrer que pour $f \in L^1(\lambda)$, $f * \phi_n \to f$ dans $L^1(\lambda)$. [Indication : prouver l'assertion pour *f* continue à support compact puis utiliser la densité des fonctions continues à support compact dans $L^1(\lambda)$].

E4 : Montrer que si $(\phi_n)_\mathbb{N}$ est une approximation de l'unité, alors $(\phi_n)_\mathbb{N}$ n'est pas une suite de Cauchy dans $L^1(\lambda)$ et que par suite elle ne converge pas.

E5 : Déduire de 4. que $\left(L^1(\lambda), +, *\right)$ n'est pas unitaire.

Solution :

Remarque : Dans tout cet exercice nous faisons l'abus de langage courant qui consiste à confondre une fonction intégrable avec la classe qu'elle représente pour la relation d'équivalence "être égales λ-presque partout".

S1 : La suite $\phi_n:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$ définie par $\phi_n(x)=\left(\dfrac{n}{2}\right)^d\cdot 1_{[-1/n,1/n]\times\ldots\times[-1/n,1/n]}$ est une approximation de l'unité. Un autre exemple est donné par $\phi_n(x)=\dfrac{n^d}{\sqrt{\pi^d}}\exp\left(-n^2\sum_{i=1}^d x_i^2\right)$. Dans ce dernier cas les ϕ_n sont de classe $\mathcal{C}^\infty$.

S2 : En posant $u=n\cdot x$, nous obtenons : $\int\phi_n(x)dx=n^d\int\phi(n\cdot x)dx=\int\phi(u)du=1$ et $\lim\limits_{n\to\infty}\int_{\{\|x\|>r\}}\phi_n(x)dx=\lim\limits_{n\to\infty}\int_{\{\|u\|>n\cdot r\}}\phi(u)du=0$ (par le théorème de convergence dominée).

S3 : Soit $f\in L^1(\lambda)$. $\|f*\phi_n-f\|_1=\int|f*\phi_n(x)-f(x)|dx=\int\left|\int f(x-y)\cdot\phi_n(y)dy-f(x)\right|dx$ $=\int\left|\int\big(f(x-y)-f(x)\big)\cdot\phi_n(y)dy\right|dx\le\int\left(\int|f(x-y)-f(x)|\cdot\phi_n(y)dy\right)dx$. Par Fubini, $\int\left(\int|f(x-y)-f(x)|\cdot\phi_n(y)dy\right)dx=\int\left(\int|f(x-y)-f(x)|\cdot\phi_n(y)dx\right)dy$. Notons *K* le support de *f* et supposons que *K* est compact. Le support de $x\mapsto f(x-y)-f(x)$ est contenu dans le compact $(y+K)\cup K$ où $y+K=\{y+x\mid x\in K\}$. *f* étant uniformément continue (car à support compact), pour $\varepsilon>0$ il existe $\delta>0$ tel que $\|y\|\le\delta\Rightarrow|f(x-y)-f(x)|\le\varepsilon$. La dernière expression devient donc,

$$\int_{\{\|y\|\le\delta\}}\phi_n(y)\cdot\int|f(x-y)-f(x)|dx\,dy+\int_{\{\|y\|>\delta\}}\phi_n(y)\cdot\int|f(x-y)-f(x)|dx\,dy.$$ Or

$$\int_{\{\|y\|\le\delta\}}\phi_n(y)\cdot\int|f(x-y)-f(x)|dx\,dy=\int_{\{\|y\|\le\delta\}}\phi_n(y)\cdot\int_{(y+K)\cup K}|f(x-y)-f(x)|dx\,dy$$
$$\le\varepsilon\int_{\{\|y\|\le\delta\}}\phi_n(y)\cdot\lambda\big((y+K)\cup K\big)dy\le 2\lambda(K)\varepsilon\cdot\int_{\{\|y\|\le\delta\}}\phi_n(y)dy\le 2\lambda(K)\varepsilon$$ et

$$\int_{\{\|y\|>\delta\}}\phi_n(y)\cdot\int|f(x-y)-f(x)|dx\,dy=\int_{\{\|y\|>\delta\}}\phi_n(y)\cdot\int_{(y+K)\cup K}|f(x-y)-f(x)|dx\,dy$$
$$\le 4M\cdot\lambda(K)\cdot\int_{\{\|y\|>\delta\}}\phi_n(y)dy\to 0$$ lorsque $n\to+\infty$ où $M=\max\limits_K|f(x)|$. Ainsi $\|f*\phi_n-f\|_1\to 0$ lorsque $n\to+\infty$. Soit à présent $f\in L^1(\lambda)$ quelconque et $\varepsilon>0$. Par densité des fonctions continues à support compact dans $L^1(\lambda)$, il existe $h\in L^1(\lambda)$ continue à support compact telle que $\|f-h\|_1\le\varepsilon/3$ et pour $n\ge N\in\mathbb{N},\|h*\phi_n-h\|_1\le\varepsilon/3$. Etant donné que $f*\phi_n-f=\big(f*\phi_n-h*\phi_n\big)+\big(h*\phi_n-h\big)+\big(h-f\big)$, nous avons pour $n\ge N$, $\|f*\phi_n-f\|_1\le\|(f-h)*\phi_n\|_1+\|h*\phi_n-h\|_1+\|h-f\|_1\le\varepsilon/3+\varepsilon/3+\varepsilon/3=\varepsilon$ (car $\|(f-h)*\phi_n\|_1\le\|(f-h)\|_1\|\phi_n\|_1=\|(f-h)\|_1$).

S4 : Soit $n\in\mathbb{N}$ fixé. Il existe $\delta>0$ tel que $\int_{\{\|x\|\le\delta\}}\phi_n(x)dx\le 1/4$ (par le théorème de convergence dominée appliqué à la suite $1_{\{\|x\|\le 1/k\}}\cdot\phi_n$). Donc $\int_{\{\|x\|>\delta\}}\phi_n(x)dx\ge 1-1/4=3/4$.

Par définition, il existe aussi $M \geq 0$ tel que $m \geq M \Rightarrow \int_{\{\|x\|>\delta\}} \phi_m(x)dx \leq 1/4$. Donc, pour $m \geq M$, $\int_{\{\|x\|\leq\delta\}} \phi_m(x)dx \geq 1-1/4 = 3/4$. Donc pour $m \geq M$,

$$\|\phi_n - \phi_m\|_1 = \int |\phi_n(x)-\phi_m(x)|dx = \int_{\{\|x\|>\delta\}} |\phi_n(x)-\phi_m(x)|dx + \int_{\{\|x\|\leq\delta\}} |\phi_n(x)-\phi_m(x)|dx$$

$$\geq \int_{\{\|x\|>\delta\}} \left(\phi_n(x)-\phi_m(x)\right)dx + \int_{\{\|x\|\leq\delta\}} \left(\phi_m(x)-\phi_n(x)\right)dx \geq 3/4-1/4+3/4-1/4 = 1.$$ Par conséquent, $(\phi_n)_{\mathbb{N}}$ n'est pas une suite de Cauchy dans $L^1(\lambda)$ et donc elle ne converge pas.

S5 : Supposons que $\left(L^1(\lambda),+,*\right)$ est unitaire et soit $g \in L^1(\lambda)$ l'élément neutre pour le produit de convolution. Soit de plus $(\phi_n)_{\mathbb{N}}$ une approximation de l'unité. Alors $\phi_n = g * \phi_n \to g$ dans $L^1(\lambda)$, ce qui est impossible par 4.

EXERCICE 14.

Niveau : Deuxième Cycle
Auteur : Ruben Ricchiuto (18.05.05, ruben@sciences.ch)
Mots Clés : Espace $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ et normes $\| \ \|_p$

Énoncé :

Nous considérons l'espace $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ muni des normes $\| \ \|_p$ $p \geq 1$ avec, on le rappelle,

$\|f\|_p = \left(\int_a^b |f(x)|^p \, dx\right)^{1/p}$ et $\|f\|_\infty = \max\{|f(x)| \mid x \in [a,b]\}$. Montrer que pour tout $f \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$, $\lim_{p\to\infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty$.

Solution :

Si $f = 0$ l'affirmation est vraie. Supposons $f \neq 0$.

$\|f\|_p = \left(\int_a^b |f(x)|^p \, dx\right)^{1/p} \leq \left(\int_a^b \|f\|_\infty^p \, dx\right)^{1/p} = \|f\|_\infty \cdot (b-a)^{1/p}$. D'un autre côté, soit $x_0 \in [a,b]$ tel que $\|f\|_\infty = |f(x_0)|$. Par continuité, pour $\|f\|_\infty \geq \varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que $|x - x_0| \leq \delta \Rightarrow |f(x_0) - f(x)| \leq \varepsilon / 2$. Donc,

$\|f\|_p^p = \int_a^b |f(x)|^p \, dx \geq \int_{x_0-\delta/2}^{x_0+\delta/2} \left(\|f\|_\infty - \varepsilon/2\right)^p dx = \left(\|f\|_\infty - \varepsilon/2\right)^p \delta$ et par suite,

$\|f\|_p \geq \left(\|f\|_\infty - \varepsilon/2\right)\delta^{1/p}$. Pour finir, $\left(\|f\|_\infty - \varepsilon/2\right)\delta^{1/p} \leq \|f\|_p \leq \|f\|_\infty \cdot (b-a)^{1/p}$. Si $p \to +\infty$, $\|f\|_\infty \cdot (b-a)^{1/p} \to \|f\|_\infty$ et $\left(\|f\|_\infty - \varepsilon/2\right)\delta^{1/p} \to \|f\|_\infty - \varepsilon/2$ donc pour *p* assez grand, $\|f\|_\infty - \varepsilon \leq \|f\|_p \leq \|f\|_\infty + \varepsilon$ c'est-à-dire $\left|\|f\|_p - \|f\|_\infty\right| \leq \varepsilon$.