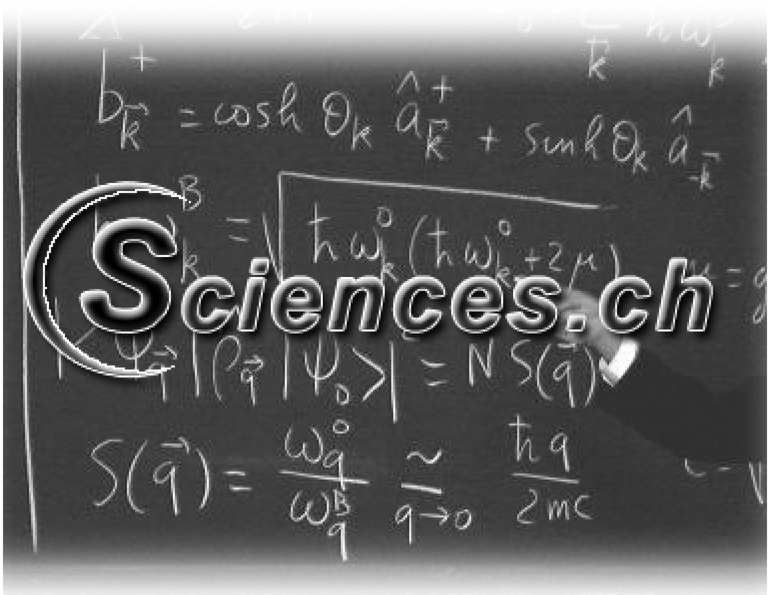

EXERCICES DE

ALGÈBRE LINÉAIRE

EXERCICE 1.

Niveau : Deuxième Cycle
Auteur : Ruben Ricchiuto (30.12.04)
Mots Clés : Matrices à coefficients dans un anneau

Énoncé :

Soit *R* un anneau commutatif unitaire et $M_n(R)$ l'ensemble des matrices carrées $n \times n$ à coefficients dans *R*.

1. Montrer que pour toute matrice $A \in M_n(R)$ il existe deux matrices B et C telles que $BA = AC = \det(A) \cdot I$ où *I* est la matrice identité. [Indications: si $\{a_1,..,a_n\}$ sont les vecteurs colonnes de la matrice *A* et $e_j = (0,...,0,1,0,...,0)^t$ avec 1 à la j-ème place alors vérifier que la matrice $C = (c_{ij})$ définie par $c_{ij} = \det(a_1,...,a_{i-1},e_j,a_{i+1},...,a_n)$ fait l'affaire.]
2. Déduire de 1. que A est inversible ssi $\det(A)$ est inversible dans *A*.
3. Est-ce que les matrices suivantes: $\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} X-4 & X-3 \\ X+3 & X+4 \end{pmatrix}$ sont inversibles dans $\mathbb{Z}$ respectivement $\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}[X]$? Si oui, calculer leur inverse.

Solution :

1. Soit $C = (c_{ij})$ définie comme dans l'indication et $A = (a_{ij})$. Notons $M = (m_{ij}) := AC$. On a, $m_{ij} = \sum_k a_{ik}c_{kj} = \sum_k a_{ik} \cdot \det(a_1,...,a_{k-1},e_j,a_{k+1},...,a_n)$. Or pour $i \neq j$, $\sum_k a_{ik} \cdot \det(a_1,...,a_{k-1},e_j,a_{k+1},...,a_n)$ est le déterminant de la matrice que nous obtenons en remplaçant la j-ème ligne de *A* par la i-ème ligne (développer le déterminant de cette dernière matrice par rapport à la j-ème ligne pour le voir) par conséquent cette expression est nulle (les lignes *i* et *j* sont identiques). Pour $i = j$, $\sum_k a_{ik} \cdot \det(a_1,...,a_{k-1},e_j,a_{k+1},...,a_n)$ est le déterminant de la matrice *A*. Ainsi $m_{ij} = 0$ si $i \neq j$ et $m_{ij} = \det(A)$ si $i = j$, en d'autres termes nous venons de montrer que $AC = \det(A) \cdot I$. En considérant A^t (la matrice transposée) nous obtenons par le raisonnement précédent l'existence d'une matrice *B* telle que $A^t B = \det(A) \cdot I$ et donc $\left(A^t B\right)^t = B^t A = \det(A) \cdot I$.

2. Si *A* est inversible, alors $1 = \det(I) = \det(A \cdot A^{-1}) = \det(A) \cdot \det(A^{-1})$ ce qui montre que $\det(A)$ est inversible. Réciproquement, étant donné que $AC = BA = \det(A) \cdot I$ on a $A \cdot \left(\det(A)^{-1} C\right) = \left(\det(A)^{-1} B\right) \cdot A = I$ ce qui montre que *A* est inversible.

3. $\det\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = 5-6=-1$ est inversible. L'inverse de $\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ est $\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$. $\det\begin{pmatrix} X-4 & X-3 \\ X+3 & X+4 \end{pmatrix} = X^2-16-X^2+9=3(\text{mod}10)$ est inversible.

   L'inverse de $\begin{pmatrix} X-4 & X-3 \\ X+3 & X+4 \end{pmatrix}$ est $\begin{pmatrix} -3X-2 & 3X+1 \\ 3X-1 & -3X+2 \end{pmatrix}$.

EXERCICE 2.

Niveau : Premier Cycle
Auteur : Ruben Ricchiuto (10.01.05)
*Mots Clés :*Valeurs propres et vecteurs propres

Énoncé :

Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de la matrice $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$.

Solution :

Le polynôme caractéristique de A est donné par
$\det(X\cdot I-A)=\det\begin{pmatrix}X-1 & -2\\ -3 & X-4\end{pmatrix}=X^2-5X-2$. Les valeurs propres de A sont les racines de X^2-5X-2. On trouve $\lambda_1=\dfrac{5+\sqrt{33}}{2},\lambda_2=\dfrac{5-\sqrt{33}}{2}$. Les vecteurs propres associés à la valeur propre λ_1 sont les solutions du système $\begin{pmatrix}\lambda_1-1 & -2\\ -3 & \lambda_1-4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$. On trouve $(\lambda_1-1)\cdot x=2y$ c'est-à-dire $y=\dfrac{1}{2}(\lambda_1-1)\cdot x$. L'espace propre est donc
$\left\{\begin{pmatrix}x\\ \frac{1}{2}(\lambda_1-1)\cdot x\end{pmatrix}\mid x\in\mathbb{R}\right\}=\left\langle\begin{pmatrix}2\\ \lambda_1-1\end{pmatrix}\right\rangle$. De la même façon pour λ_2 on trouve $\left\langle\begin{pmatrix}2\\ \lambda_2-1\end{pmatrix}\right\rangle$.

EXERCICE 3.

Niveau : Premier Cycle
Auteur : Ruben Ricchiuto (10.01.05)
Mots Clés : Diagonalisation

Énoncé :

Diagonaliser la matrice $A=\begin{pmatrix}3 & 6 & -4\\0 & -1 & 1\\3 & 5 & -3\end{pmatrix}$.

Solution :

Le polynôme caractéristique de A est donné par

$$\det(A-X\cdot I)=\det\begin{pmatrix}3-X & 6 & -4\\0 & -1-X & 1\\3 & 5 & -3-X\end{pmatrix}=(3-X)\begin{vmatrix}-1-X & 1\\5 & -3-X\end{vmatrix}+3\begin{vmatrix}6 & -4\\-1-X & 1\end{vmatrix}$$

$$=-X\cdot(X^2+X-2)=-X(X-1)(X+2).$$

Les racines du polynôme caractéristique correspondant aux valeurs propres de A sont: $\{0,1,-2\}$. Calculons les espaces propres. L'espace propre associé à la valeur propre 0 est obtenu en résolvant le système : $\begin{pmatrix}3 & 6 & -4\\0 & -1 & 1\\3 & 5 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$. Nous obtenons $z=y, x=-\frac{2}{3}y$.

D'où l'espace propre, $\left\langle\begin{pmatrix}-2\\3\\3\end{pmatrix}\right\rangle$. L'espace propre associé à la valeur propre 1 est obtenu en résolvant le système : $\begin{pmatrix}2 & 6 & -4\\0 & -2 & 1\\3 & 5 & -4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$. Nous obtenons $z=2y, x=y$. D'où l'espace propre, $\left\langle\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}\right\rangle$. L'espace propre associé à la valeur propre -2 est obtenu en résolvant le système : $\begin{pmatrix}5 & 6 & -4\\0 & 1 & 1\\3 & 5 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$. Nous obtenons $y=-z, x=2z$. D'où l'espace propre,

$\left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$. Ainsi dans la base $\left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$, la matrice de l'endomorphisme A s'écrit,

$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$. Ou dit autrement, $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 6 & -4 \\ 0 & -1 & 1 \\ 3 & 5 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

EXERCICE 4.

Niveau : Premier Cycle
Auteur : Ruben Ricchiuto(10.01.05)
Mots Clés : Déterminant de Vandermonde, polynômes

Énoncé :

Soit $\mathbb{K}$ un corps quelconque et $x_1,..,x_n \in \mathbb{K}$. On considère la matrice carrée suivante :

$$M(x_1,..,x_n)=\begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

1. On définit $V_n(x_1,..,x_n)=\det(M(x_1,..,x_n))$. Montrer que $V_n(x_1,..,x_n)=\left(\prod_{j=2}^{n}(x_j-x_1)\right)\cdot V_{n-1}(x_2,..,x_n)$. [Indication : calculer le déterminant de la matrice obtenue à partir de $M(x_1,..,x_n)$ en soustrayant à chaque colonne x_1 fois la précédente.]
2. Déduire de 1. que $V_n(x_1,..,x_n)=\prod_{i=1}^{n-1}\prod_{j=i+1}^{n}(x_j-x_i)$ pour $n\geq 2$.
3. Donner une condition nécessaire et suffisante, portant sur les x_i, pour que la matrice $M(x_1,..,x_n)$ soit inversible.
4. En utilisant 1. montrer qu'il existe un unique polynôme de degré $\leq n$ passant par les $n+1$ points $(x_1,y_1),..,(x_{n+1},y_{n+1})\in\mathbb{K}\times\mathbb{K}$ avec $x_i\neq x_j$ pour $i\neq j$.

Solution :

1. A l'aide de l'indication nous obtenons la matrice suivante,
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & x_2-x_1 & x_2(x_2-x_1) & \cdots & x_2^{n-2}(x_2-x_1) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & x_n-x_1 & x_n(x_n-x_1) & \cdots & x_n^{n-2}(x_n-x_1) \end{pmatrix}$$ qui a évidement le même déterminant que $M(x_1,..,x_n)$. En développant selon la première ligne nous obtenons :
$V_n(x_1,..,x_n)=\det(M(x_1,..,x_n))=\det(A)$ où
$$A=\begin{pmatrix} x_2-x_1 & x_2(x_2-x_1) & \cdots & x_2^{n-2}(x_2-x_1) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_n-x_1 & x_n(x_n-x_1) & \cdots & x_n^{n-2}(x_n-x_1) \end{pmatrix}$$. Sachant que le déterminant est

multilinéaire nous obtenons

$$V_n(x_1,..,x_n) = \det(M(x_1,..,x_n)) = \prod_{j=2}^{n}(x_j - x_1)\cdot \det\begin{pmatrix} 1 & x_2 & \cdots & x_2^{n-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^{n-2} \end{pmatrix}$$

$$= \prod_{j=2}^{n}(x_j - x_1)\cdot V_{n-1}(x_2,..,x_n).$$

2. Par récurrence sur *n*. Si $n = 2$, $V_2(x_1, x_2) = (x_2 - x_1)$ et la proposition est vraie. Supposons l'affirmation démontrée pour $n \geq 2$. Par 1. on a $V_{n+1}(x_1,..,x_n) = \left(\prod_{j=2}^{n+1}(x_j - x_1)\right)\cdot V_n(x_2,..,x_{n+1})$. Par hypothèse de récurrence, $V_n(x_2,..,x_{n+1}) = \prod_{i=1}^{n-1}\prod_{j=i+1}^{n}(x_{j+1} - x_{i+1})$ d'où $V_{n+1}(x_1,..,x_n) = \left(\prod_{j=2}^{n+1}(x_j - x_1)\right)\cdot \prod_{i=1}^{n-1}\prod_{j=i+1}^{n}(x_{j+1} - x_{i+1}) = \prod_{i=1}^{n}\prod_{j=i+1}^{n+1}(x_j - x_i)$. Ainsi l'affirmation est vérifiée pour $n+1$.
3. La matrice $M(x_1,..,x_n)$ est inversible ssi son déterminant est non nul c'est-à-dire ssi $V_n(x_1,..,x_n) = \prod_{i=1}^{n-1}\prod_{j=i+1}^{n}(x_j - x_i) \neq 0$, donc ssi $x_i \neq x_j$ pour $i \neq j$.
4. Soit $(x_1, y_1),..,(x_{n+1}, y_{n+1}) \in \mathbb{K}\times\mathbb{K}$ $n+1$ points. La recherche d'un polynôme $p(X) = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$ de degré $\leq n$ passant par ces $n+1$ points nous amène à rechercher les solutions des équations $\sum_{i=0}^{n} a_i x_j^i = y_j$ pour $1 \leq j \leq n+1$. C'est-à-dire
$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & x_{n+1} & x_{n+1}^2 & \cdots & x_{n+1}^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n+1} \end{pmatrix}$$
. Or par 3, la matrice de ce système est inversible. Par suite, l'affirmation de l'énoncé est prouvée.

EXERCICE 5.

Niveau : Premier Cycle
Auteur : Ruben Ricchiuto(10.01.05)
Mots Clés : Théorème de Cayley

Énoncé :

On se propose de démontrer le théorème suivant: soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée de dimension *n* à coefficients dans le corps $\mathbb{K}$ alors $Car_A(A) = 0$ où $Car_A(X)$ est le polynôme caractéristique de *A*.

1. Vérifier le théorème pour la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$.

2. Pour $x \in \mathbb{K}^n$, considérer la famille $\mathcal{F} := \left\{x, Ax, A^2x, ..., A^{m-1}x\right\}$ avec $m-1 = \max\left\{k \in \mathbb{N} \mid \left\{x, Ax, A^2x, ..., A^k x\right\} \text{ est libre}\right\}$. Compléter (éventuellement) la famille $\mathcal{F}$ pour obtenir une base de $\mathbb{K}^n$. Exprimer la matrice de l'endomorphisme *A* dans cette nouvelle base et montrer que le polynôme caractéristique s'exprime comme produit de deux polynômes $P(X)$ et $Q(X)$ avec $P(A)x = 0$. En déduire le théorème.

Solution :

1. Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$ on a $Car_A(X) = \det(X \cdot I - A) = \det\begin{pmatrix} X-1 & -2 \\ 5 & X-3 \end{pmatrix} = X^2 - 4X + 13$.

   $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 & 8 \\ -20 & -1 \end{pmatrix}$. Donc

   $Car_A(A) = A^2 - 4A + 13 \cdot I = \begin{pmatrix} -9 & 8 \\ -20 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ -20 & 12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 13 & 0 \\ 0 & 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Nous allons montrer que pour tout $x \in \mathbb{K}^n$, $Car_A(A)(x) = 0$. Soit donc $x \in \mathbb{K}^n$, considérons la famille $\mathcal{F} := \left\{x, Ax, A^2x, ..., A^{m-1}x\right\}$ avec $m-1 = \max\left\{k \in \mathbb{N} \mid \left\{x, Ax, A^2x, ..., A^k x\right\} \text{ est libre}\right\}$.

Dans ce cas $A^m x = \sum_{i=0}^{m-1} a_i A^i x$ avec $a_i \in \mathbb{K}$ et $A^0 = I$. Complétons si nécessaire la famille $\mathcal{F}$ pour obtenir une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{K}^n$. Dans la base $\mathcal{B}$, la matrice de l'endomorphisme *A* s'écrit,

$\begin{pmatrix} B & C \\ 0 & D \end{pmatrix}$ où $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & a_0 \\ 1 & 0 & 0 & a_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & a_{m-1} \end{pmatrix}$ est une matrice $m \times m$ et *D* est une matrice $(n-m) \times (n-m)$. Le polynôme caractéristique de *B* est donné par

$Car_B(X)=\begin{vmatrix} X & 0 & 0 & -a_0 \\ -1 & X & 0 & -a_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & -1 & X-a_{m-1} \end{vmatrix}$. En développant par rapport à la dernière colonne on voit que $Car_B(X)=\sum_{i=0}^{m-1}-a_iX^i+X^m$. De plus $Car_B(A)x=\sum_{i=0}^{m-1}-a_iA^ix+A^mx=0$. Donc $Car_A(A)x=Car_B(A)\cdot Car_D(A)x=Car_D(A)\cdot Car_B(A)x=0$

EXERCICE 6.

Niveau : Premier Cycle
Auteur : Ruben Ricchiuto (10.01.05)
Mots Clés : Rang d'une matrice

Énoncé :

Déterminer le rang de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -5 & 4 & -4 \\ 2 & 0 & -3 & -2 & -4 & -5 \\ 3 & 0 & 9 & -3 & 21 & 6 \\ 4 & 1 & 0 & 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}$.

Solution :

On rappelle que les permutations de lignes ou de colonnes ne changent pas le rang d'une matrice. On peut aussi remplacer une ligne (ou une colonne) par une combinaison linéaire de lignes (respectivement de colonnes) dans laquelle cette dernière intervient sans changer le rang. Dans les lignes qui suivent un symbole du type: $\xrightarrow[\ell_1]{2\cdot\ell_1-\ell_4}$ signifie que l'on a remplacé la première ligne de la matrice par deux fois la première moins la quatrième, tandis qu'un symbole du type $\xrightarrow{C_1,C_2}$ signifie que l'on a permuté la première colonne avec la deuxième. On a:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -5 & 4 & -4 \\ 2 & 0 & -3 & -2 & -4 & -5 \\ 3 & 0 & 9 & -3 & 21 & 6 \\ 4 & 1 & 0 & 0 & 5 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{C_1,C_2} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & -5 & 4 & -4 \\ 0 & 2 & -3 & -2 & -4 & -5 \\ 0 & 3 & 9 & -3 & 21 & 6 \\ 1 & 4 & 0 & 0 & 5 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\ell_4]{\ell_1+\ell_4} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & -5 & 4 & -4 \\ 0 & 2 & -3 & -2 & -4 & -5 \\ 0 & 3 & 9 & -3 & 21 & 6 \\ 0 & 5 & 2 & -5 & 9 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\ell_3]{2\cdot\ell_3-3\cdot\ell_2} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & -5 & 4 & -4 \\ 0 & 2 & -3 & -2 & -4 & -5 \\ 0 & 0 & 27 & 0 & 54 & 27 \\ 0 & 5 & 2 & -5 & 9 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\ell_4]{5\cdot\ell_2-2\cdot\ell_4} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & -5 & 4 & -4 \\ 0 & 2 & -3 & -2 & -4 & -5 \\ 0 & 0 & 27 & 0 & 54 & 27 \\ 0 & 0 & -19 & 0 & -38 & -19 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\ell_3]{\ell_3/27} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & -5 & 4 & -4 \\ 0 & 2 & -3 & -2 & -4 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -19 & 0 & -38 & -19 \end{pmatrix} \xrightarrow[\ell_4]{-\ell_4/19} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & -5 & 4 & -4 \\ 0 & 2 & -3 & -2 & -4 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\ell_4]{\ell_3-\ell_4} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & -5 & 4 & -4 \\ 0 & 2 & -3 & -2 & -4 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et cette dernière matrice est de rang 3.

EXERCICE 7.

Niveau : Premier Cycle
Auteur : Ruben Ricchiuto (10.01.05)
Mots Clés : Classes de conjugaison des matrices 2×2

Énoncé :

On dit que deux matrices $A,B\in M_n(\mathbb{R})$ sont conjuguées s'il existe une matrice inversible $S\in M_n(\mathbb{R})$ telle que $A=SBS^{-1}$. Être conjugué est une relation d'équivalence sur $M_n(\mathbb{R})$ dont les classes sont appelées *classes de conjugaison*. Montrer que toute matrice de $M_2(\mathbb{R})$ est conjuguée à exactement une des matrices suivantes: $\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\lambda_1 & 1\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}a & b\\ -b & a\end{pmatrix}$.

[Indication : distinguer les cas *A* diagonalisable, *A* n'a qu'une valeur propre de multiplicité géométrique un et *A* n'a aucune valeur propre réelle. Pour ce dernier cas, regarder *A* comme un élément de $M_n(\mathbb{C})$.]

Solution :

Soit $A\in M_2(\mathbb{R})$. Trois cas peuvent se présenter.

Premier cas : *A* est diagonalisable.

Deuxième cas : *A* n'a qu'une valeur propre de multiplicité géométrique un.

Troisième cas : *A* n'a aucune valeur propre réelle.

Dans le premier cas, la matrice *A* est conjuguée à une matrice du type $\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}$.

Dans le deuxième cas, soit λ la valeur propre de *A*. Soit *v* un vecteur propre et *w* tel que $\mathbb{R}^2=\langle v\rangle\oplus\langle w\rangle$. Dans la base $\{v,w\}$ la matrice *A* s'écrit $\begin{pmatrix}\lambda & a\\ 0 & b\end{pmatrix}$ avec $Aw=av+bw$, $a,b\in\mathbb{R}$. Or étant donné que λ est l'unique valeur propre de *A*, on a forcément $b=\lambda$. Le fait que λ soit de multiplicité géométrique égale à un entraîne que $a\neq 0$ et par suite dans la base $\left\{v,\dfrac{1}{a}w\right\}$ la matrice *A* s'écrit $\begin{pmatrix}\lambda & 1\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}$.

Dans le troisième cas, *A* possède deux valeurs propres complexes conjuguées, notons-les $\lambda=a+ib,\overline{\lambda}=a-ib$ avec $b\neq 0$. Soit $v=v_1+iv_2$ un vecteur propre associé à λ avec $v_1,v_2\in\mathbb{R}^2$. On a $Av=Av_1+iAv_2=\lambda v=av_1-bv_2+i(bv_1+av_2)$ et donc $Av_1=av_1-bv_2,Av_2=bv_1+av_2$. Par suite, dans la base $\{v_1,v_2\}$ *A* s'écrit $\begin{pmatrix}a & b\\ -b & a\end{pmatrix}$. Il nous reste encore à montrer que les matrices $\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\lambda_1 & 1\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}a & b\\ -b & a\end{pmatrix}$ ne sont pas conjuguées deux à deux. Mais ceci est évident car les trois cas que nous avons traités s'excluent mutuellement.

EXERCICE 8.

Niveau : Premier Cycle
Auteur : Ruben Ricchiuto (10.01.05)
Mots Clés : Matrices Trigonalisables

Énoncé :

1. Montrer que dans $M_n(\mathbb{C})$ il existe des matrices non diagonalisables.
2. Montrer que dans $M_n(\mathbb{R})$ il existe des matrices non trigonalisables (on rappelle qu'une matrice *A* est trigonalisable s'il existe une matrice inversible *S* telle que SAS^{-1} est triangulaire supérieure)
3. Montrer que dans $M_n(\mathbb{C})$ toutes les matrices sont trigonalisables. [Indication: procéder par récurrence sur *n* en se rappelant que si $M \in M_n(\mathbb{C})$, *M* possède toujours une valeur propre.]

Solution :

1. La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C})$ n'est pas diagonalisable. En effet la dimension de l'espace propre associé à la valeur propre 1 est 1 et il n'y a pas d'autres valeurs propres. On ne peut donc pas trouver de base formée de vecteurs propres.
2. Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Le polynôme caractéristique de *M* est $P_M(X) = X^2 - 2X + 5$. Or $P_M(X)$ ne possède aucune racine réelle, par conséquent M n'a aucune valeur propre réelle et donc ne peut être trigonalisable.
3. Par récurrence sur *n*. Si $n = 1$ il n'y a rien à montrer. Supposons l'affirmation vérifiée jusqu'à $n \geq 1$. Soit $M \in M_{n+1}(\mathbb{C})$. $\mathbb{C}$ étant algébriquement clos, *M* possède une valeur propre λ. Soit *v* un vecteur propre de valeur propre λ. Complétons *v* en une base de $\mathbb{C}^{n+1}$. Dans cette nouvelle base la matrice *M* s'écrit: $SMS^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$ où $B \in M_n(\mathbb{C})$ et *S* est la matrice de changement de base. Par hypothèse de récurrence, il existe $D \in M_n(\mathbb{C})$ inversible telle que DBD^{-1} soit triangulaire supérieure. Ainsi $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} \cdot SMS^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & D^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & CD^{-1} \\ 0 & DBD^{-1} \end{pmatrix}$ est triangulaire supérieure.

EXERCICE 9.

Niveau : Premier Cycle
Auteur : Ruben Ricchiuto (10.01.05)
Mots Clés : Espace des suites et équations aux différences

Énoncé :

On considère l'espace vectoriel $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ des suites à valeur dans $\mathbb{C}$ avec les opérations d'addition et de multiplication par un scalaire suivantes: $\forall (a_n)_{\mathbb{N}}, (b_n)_{\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}, (a_n)_{\mathbb{N}} + (b_n)_{\mathbb{N}} = (a_n + b_n)_{\mathbb{N}}$. $\forall \lambda \in \mathbb{C}, \lambda \cdot (a_n)_{\mathbb{N}} = (\lambda a_n)_{\mathbb{N}}$. Soit l'application linéaire $D : \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ définie par $(a_0, a_1, ...) \mapsto (a_1, a_2, ...)$.

1. Soit $A = D^k + \sum_{i=0}^{k-1} \lambda_i D^i$ avec $\lambda_i \in \mathbb{C}$ et $D^j = D \circ D \circ ... \circ D$ j fois, $D^0 = id$ et $k \geq 1$. Montrer que le noyau de *A* est de dimension *k*.

2. On considère le polynôme caractéristique $P(X) = X^k + \sum_{i=0}^{k-1} \lambda_i X^i$ associé à *A*. Soit $\{z_1, ..., z_k\}$ les racines de *P*. Montrer que si $z_i \neq z_j$ pour $i \neq j$ alors $\{(z_1^n)_{n\in\mathbb{N}}, ..., (z_k^n)_{n\in\mathbb{N}}\}$ est une base de $\ker(A)$ avec $(z^n)_{\mathbb{N}} = (1, 0, ...)$ si $z = 0$.
[Indication : pour montrer que $(z_1^n)_{n\in\mathbb{N}}, ..., (z_k^n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont linéairement indépendantes écrire que $\lambda_1 (z_1^n)_{n\in\mathbb{N}} + ... + \lambda_k (z_k^n)_{n\in\mathbb{N}} = 0$ et montrer qu'en prenant $n = 0...k-1$ on tombe sur un système d'équations défini par une matrice $k \times k$ de Vandermonde].

3. Déterminer la suite de Fibonacci $a = (a_n)_{\mathbb{N}}$, $a_n \in \mathbb{C}$ définie par $D^2 a - Da - a = 0$, avec "conditions initiales" $a_0 = a_1 = 1$.

Solution :

1. Soit $a = (a_n)_{\mathbb{N}}$. $a \in \ker(A) \Leftrightarrow D^k a + \sum_{i=0}^{k-1} \lambda_i D^i a = 0 \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, a_{n+k} = -\sum_{i=0}^{k-1} \lambda_i a_{n+i}$. Ainsi tout élément de $\ker(A)$ est uniquement déterminé par le choix de $a_0, .., a_{k-1}$. Par suite $\ker(A) \simeq \mathbb{K}^k$ et donc $\dim(\ker(A)) = k$.

2. Soit *z* une racine de $P(X) = X^k + \sum_{i=0}^{k-1} \lambda_i X^i$. Montrons que $a = (z^n)_{\mathbb{N}} \in \ker(A)$. En effet
$$Aa = D^k a + \sum_{i=0}^{k-1} \lambda_i D^i a = (z^{n+k})_{n\in\mathbb{N}} + \sum_{i=0}^{k-1} \lambda_i (z^{n+i})_{n\in\mathbb{N}} = a \cdot \left(z^k + \sum_{i=0}^{k-1} \lambda_i z^i \right) = a \cdot P(z) = 0.$$
Supposons de plus que les racines de *P* sont deux à deux distinctes. Notons $\{z_1, ..., z_k\}$ ces racines et $a_i = (z_i^n)_{n\in\mathbb{N}}, 1 \leq i \leq k$. Nous avons déjà montré que $a_i \in \ker(A)$ pour $1 \leq i \leq k$. Montrons que $\{a_1, .., a_k\}$ est une base de $\ker(A)$. Il suffit pour cela de montrer que $a_1, .., a_k$ sont linéairement indépendants. Si $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i a_i = 0$ alors pour tout

$n \in \mathbb{N}$, $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i z_i^n = 0$. En prenant $n = 0 \ldots k-1$ on obtient le système suivant,
$\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ z_1 & \cdots & z_k \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ z_1^{k-1} & \cdots & z_k^{k-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_k \end{pmatrix} = 0$. Or la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ z_1 & \cdots & z_k \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ z_1^{k-1} & \cdots & z_k^{k-1} \end{pmatrix}$ est une matrice de Vandermonde et nous savons que si les z_i sont distincts deux à deux, une telle matrice est inversible. Ainsi $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_k = 0$.

3. $A = D^2 - D - I$. Le polynôme caractéristique associé à A est donc $X^2 - X - 1$ qui admet les racines $\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. L'espace des solutions de l'équation $D^2 a - Da - a = 0$ est engendré par $\left(\lambda_1^n\right)_{\mathbb{N}}, \left(\lambda_2^n\right)_{\mathbb{N}}$. La condition $a_0 = a_1 = 1$ nous amène à chercher $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ tels que $\alpha + \beta = \alpha\lambda_1 + \beta\lambda_2 = 1$. Nous devons donc résoudre le système 2×2 : $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Les solutions sont
$\alpha = \frac{1-\lambda_2}{\sqrt{5}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}, \beta = \frac{\lambda_1 - 1}{\sqrt{5}} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$. La suite de Fibonacci est donnée par
$a = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\lambda_1^{n+1}\right)_{\mathbb{N}} - \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\lambda_2^{n+1}\right)_{\mathbb{N}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\lambda_1^{n+1} - \lambda_2^{n+1}\right)_{\mathbb{N}}$.

EXERCICE 10.

Niveau : Premier Cycle
Auteur : Ruben Ricchiuto (10.01.05)
Mots Clés : Espace orthogonal

Énoncé :

Soit n,m deux entiers ≥ 1. Soit $A=(a_{ij})\in M_{n,m}(\mathbb{R})$ (A est une matrice à n lignes et m colonnes à coefficients dans $\mathbb{R}$).

1. Montrer que $\ker(A)=\operatorname{Im}(A^t)^{\perp}$ où A^t est la matrice transposée de *A*.
2. Déduire de 1. que $\dim(\operatorname{Im}(A))=\dim(\operatorname{Im}(A^t))$.

Solution :

1. Notons $a_1,...,a_n$ les vecteurs lignes de la matrice *A*. Soit $v\in\mathbb{R}^m$. $Av=\begin{pmatrix}\langle a_1|v\rangle\\ \vdots\\ \langle a_n|v\rangle\end{pmatrix}$ où $\langle .|.\rangle$ est le produit scalaire standard sur $\mathbb{R}^m$. Par suite, dire que $v\in\ker(A)$ est équivalent à dire que *v* est orthogonal à l'espace engendré par $a_1,..,a_n$ c'est-à-dire à $\operatorname{Im}(A^t)$. Donc $\ker(A)=\operatorname{Im}(A^t)^{\perp}$.
2. Par le théorème de la dimension on a,
$m=\dim\ker(A)+\dim\operatorname{Im}(A)=\dim\operatorname{Im}(A^t)^{\perp}+\dim\operatorname{Im}(A)$. Or $\mathbb{R}^m=\operatorname{Im}(A^t)\oplus\operatorname{Im}(A^t)^{\perp}$, donc $m=\dim\operatorname{Im}(A^t)+\dim\operatorname{Im}(A^t)^{\perp}$ et en remplaçant dans l'expression précédente on trouve $\dim\operatorname{Im}(A^t)=\dim\operatorname{Im}(A)$.

EXERCICE 11.

Niveau : Premier Cycle
Auteur : Ruben Ricchiuto (10.01.05)
Mots Clés : Polynômes et théorème de décomposition

Énoncé :

1. Soit $\mathbb{K}$ un corps, $p,q \in \mathbb{K}[X]$ deux polynômes et A un endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathbb{K}^n$. Montrer que si p et q sont premiers entre eux alors $\ker(p(A)\cdot q(A)) = \ker(p(A)) \oplus \ker(q(A))$. [Indication : utiliser le théorème de Bézout].
2. Dans les mêmes conditions que 1. montrer que si $p_1,...,p_m \in \mathbb{K}[X]$ sont premiers deux à deux alors $\ker(\prod_{i=1}^{m} p_i(A)) = \ker(p_1(A)) \oplus ... \oplus \ker(p_m(A))$.
3. Supposons $\mathbb{K}$ algébriquement clos. Soit $Car_A(X) = (X-\lambda_1)^{\alpha_1} \cdot ... \cdot (X-\lambda_d)^{\alpha_d}$ le polynôme caractéristique de A avec $\lambda_i \neq \lambda_j$ si $i \neq j$, $\sum_{i=1}^{d} \alpha_i = n$. Le théorème de Cayley affirme que $Car_A(A) = 0$, en déduire que $\mathbb{K}^n = \ker(A-\lambda_1)^{\alpha_1} \oplus ... \oplus \ker(A-\lambda_d)^{\alpha_d}$ (ce dernier résultat constitue le théorème de décomposition).
4. Montrer que dans 3. $\dim(\ker(A-\lambda_i)^{\alpha_i}) = \alpha_i$. [Indication : remarquer que A induit par restriction une application linéaire $\widetilde{A} : \ker(A-\lambda_i)^{\alpha_i} \to \ker(A-\lambda_i)^{\alpha_i}$ et que le polynôme caractéristique de $\widetilde{A}$ est $(X-\lambda_i)^{\dim \ker(A-\lambda_1)^{\alpha_i}}$].

Solution :

1. Si p et q sont premier entre eux alors il existe deux polynômes $a(X), b(X) \in \mathbb{K}[X]$ tels que $a(X)p(X) + b(X)q(X) = 1$. On a l'inclusion évidente $\ker(p(A)) + \ker(q(A)) \subseteq \ker(p(A)\cdot q(A))$. Montrons que la somme dans le membre de gauche est une somme directe. En effet $x \in \ker(p(A)) \cap \ker(q(A)) \Rightarrow a(A)p(A)x + b(A)q(A)x = x = 0$. Pour finir si $x \in \ker(p(A)\cdot q(A))$, alors $a(A)p(A)x \in \ker(q(A))$ et $b(A)q(A)x \in \ker(p(A))$ donc $a(A)p(A)x + b(A)q(A)x = x \in \ker(p(A)) \oplus \ker(q(A))$. Donc $\ker(p(A)\cdot q(A)) = \ker(p(A)) \oplus \ker(q(A))$.
2. Par récurrence sur *m*. Si $m = 2$ l'affirmation découle de 1. Supposons l'affirmation vérifiée pour $m \geq 2$. Soit $p_1,...,p_{m+1} \in \mathbb{K}[X]$ premiers deux à deux. Alors p_{m+1} est premier avec $\prod_{i=1}^{m} p_i(A)$ et par hypothèse récurrence $\ker(\prod_{i=1}^{m+1} p_i(A)) = \ker(\prod_{i=1}^{m} p_i(A)) \oplus \ker(p_{m+1}(A))$. Toujours par hypothèse de récurrence

$\ker(\prod_{i=1}^{m} p_i(A)) = \ker(p_1(A)) \oplus ... \oplus \ker(p_m(A))$. Donc
$\ker(\prod_{i=1}^{m+1} p_i(A)) = \ker(p_1(A)) \oplus ... \oplus \ker(p_{m+1}(A))$.

3. $Car_A(A) = 0$ entraîne $\ker(Car_A(A)) = \mathbb{K}^n$. Si $Car_A(X) = (X - \lambda_1)^{\alpha_1} \cdot ... \cdot (X - \lambda_d)^{\alpha_d}$, 2. entraîne $\mathbb{K}^n = \ker(A - \lambda_1)^{\alpha_1} \oplus ... \oplus \ker(A - \lambda_d)^{\alpha_d}$ car les $(X - \lambda_i)^{\alpha_i}$ sont premiers deux à deux.

4. L'espace $\ker(A - \lambda_i)^{\alpha_i}$ est invariant par *A*. En effet si $x \in \ker(A - \lambda_i)^{\alpha_i}$ alors $(A - \lambda_i)^{\alpha_i} Ax = A(A - \lambda_i)^{\alpha_i} x = 0$ et donc $Ax \in \ker(A - \lambda_i)^{\alpha_i}$. Notons $\widetilde{A} : \ker(A - \lambda_i)^{\alpha_i} \to \ker(A - \lambda_i)^{\alpha_i}$ la restriction de *A* à $\ker(A - \lambda_i)^{\alpha_i}$. La seule valeur propre de $\widetilde{A}$ est λ_i. Par suite $Car_{\widetilde{A}}(X) = (X - \lambda_i)^{d_i}$ où $d_i = \dim \ker(A - \lambda_i)^{\alpha_i}$.
$Car_{\widetilde{A}}(X)$ divise $Car_A(X)$. Pour le voir il suffit de compléter $\ker(A - \lambda_i)^{\alpha_i}$ en une base de $\mathbb{K}^n$, dans cette nouvelle base, la matrice de l'endomorphisme *A* est $\begin{pmatrix} B & C \\ 0 & D \end{pmatrix}$ où B, C, D sont des matrices et *B* est la matrice de $\widetilde{A}$ dans une base de $\ker(A - \lambda_i)^{\alpha_i}$, il s'ensuit que $Car_A(X) = Car_{\widetilde{A}}(X) \cdot Car_D(X)$. Nous avons donc $d_i \le \alpha_i$. D'autre part $n = \sum_{i=1}^{d} \alpha_i = \sum_{i=1}^{d} d_i$, donc $\alpha_i = d_i$.

EXERCICE 12.

Niveau : Premier Cycle
Auteur : Ruben Ricchiuto (10.01.05)
Mots Clés : Suites exactes d'espaces vectoriels

Énoncé :

1. Soit $V_1,...,V_n$ n espaces vectoriels de dimension finie sur un corps $\mathbb{K}$ quelconque. On considère la suite $\{0\}\xrightarrow{f_0}V_1\xrightarrow{f_1}V_2\xrightarrow{f_2}V_3...V_n\xrightarrow{f_n}\{0\}$ où les f_i sont des applications linéaires et $\{0\}$ est l'espace vectoriel réduit au seul élément 0. On dit que cette suite est exacte si $\ker(f_{i+1})=\operatorname{Im}(f_i)$, $0\le i\le n-1$. Montrer que dans ce cas f_1 est injective et f_{n-1} est surjective et que $\sum_{i=1}^{n}(-1)^i\dim(V_i)=0$.

2. Montrer que la suite $0\to\mathbb{R}^2\xrightarrow{A_1}\mathbb{R}^3\xrightarrow{A_2}\mathbb{R}^1\to 0$ où $A_1=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\\0&0\end{pmatrix}$ et $A_2=\begin{pmatrix}0&0&2\end{pmatrix}$ est exacte.

Solution :

1. $\ker(f_1)=\operatorname{Im}(f_0)=\{0\}$ prouve que f_1 est injective. $\operatorname{Im}(f_{n-1})=\ker(f_n)=V_n$ prouve que f_{n-1} est surjective . Par le théorème de la dimension, $\dim(V_i)=\dim\ker(f_i)+\dim\operatorname{Im}(f_i)$. Ainsi,
$$\sum_{i=1}^{n}(-1)^i\dim(V_i)=\sum_{i=1}^{n}(-1)^i\dim\ker(f_i)+\sum_{i=1}^{n}(-1)^i\dim\operatorname{Im}(f_i)$$
$=\sum_{i=1}^{n}(-1)^i\dim\ker(f_i)+\sum_{i=1}^{n-1}(-1)^i\dim\ker(f_{i+1})$. Cette dernière expression est égale à
$$=\sum_{i=1}^{n}(-1)^i\dim\ker(f_i)+\sum_{i=2}^{n}(-1)^{i-1}\dim\ker(f_i)=-\dim\ker(f_1)+\sum_{i=2}^{n}\left((-1)^{i-1}+(-1)^i\right)\dim\ker(f_i).$$
Or $\dim\ker(f_1)=0$ donc $\sum_{i=1}^{n}(-1)^i\dim(V_i)=0$.

2. $A_2A_1=\begin{pmatrix}0&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\0&1\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\end{pmatrix}$ ce qui montre que $\operatorname{Im}(A_1)\subseteq\ker(A_2)$. De plus A_1 est une matrice de rang 2 donc $\dim\operatorname{Im}(A_1)=2$ et A_2 est une matrice de rang 1 donc $\dim\ker(A_2)=2$. Ainsi $\operatorname{Im}(A_1)=\ker(A_2)$.

EXERCICE 13.

Niveau : Premier Cycle
Auteur : Ruben Ricchiuto (10.01.05)
Mots Clés : Polynôme caractéristique d'une matrice inversible

---

Énoncé :

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ inversible. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, Car_{A^{-1}}(x) = \det(A^{-1}) \cdot x^n (-1)^n Car_A(x^{-1})$ où $Car_A(X)$ et $Car_{A^{-1}}(X)$ sont les polynômes caractéristiques de A et A^{-1}. Que peut-on en déduire sur les multiplicité algébriques des valeurs propres de A et A^{-1} ?

Solution :

Si $x \neq 0$, $Car_{A^{-1}}(x) = \det(A^{-1} - xI) = \det(A^{-1}) \cdot \det(A) \cdot \det(A^{-1} - xI) = \det(A^{-1}) \cdot \det(I - xA)$ $= \det(A^{-1}) \cdot \det(x(x^{-1}I - A)) = \det(A^{-1}) \cdot x^n (-1)^n Car_A(x^{-1})$. Cette égalité montre entre autre que si λ est valeur propre de A alors λ^{-1} est valeur propre de A^{-1} avec même multiplicité algébrique.

EXERCICE 14.

Niveau : Premier Cycle
Auteur : Ruben Ricchiuto (10.01.05)
Mots Clés : Polynôme caractéristique

Énoncé :

Quel est le polynôme caractéristique de la matrice $M = (m_{ij})$ avec $m_{ij} = 1$ pour tout $1 \leq i, j \leq n$?

Solution :

Soit $v = (v_1,...,v_n)' \in \mathbb{C}^n$ un vecteur propre de valeur propre λ. Notons $s = \sum_1^n v_k$, on a $Mv = (s, s,..., s)' = \lambda v$. Donc $\forall k = 1..n, s = \lambda v_k$ et si $\lambda \neq 0$, $\forall k = 1..n, v_k = s / \lambda$ ce qui entraîne $\lambda = n$. Pour $n \geq 2$ nous avons donc deux valeurs propres, 0 et n. Le polynôme caractéristique s'écrit comme, $P_M(X) = X^{\alpha} \cdot (X - n)^{\beta}$. De plus v est un vecteur propre de valeur propre 0 ssi $\sum_1^n v_k = 0$ donc 0 est de multiplicité géométrique égale à $n-1$ ainsi $\alpha = n-1$ et $\beta = 1$. Nous obtenons donc $P_M(X) = X^{n-1} \cdot (X - n)$.

EXERCICE 15.

Niveau : Premier Cycle
Auteur : Ruben Ricchiuto (10.01.05)
Mots Clés : Espaces vectoriels quotients

Énoncé :

Soit V un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $U \subseteq V$ un sous-espace. On définit une relation notée $\sim$ sur V de la manière suivante : $\forall x, y \in V, x \sim y$ ssi $x - y \in U$.

1. Montrer que $\sim$ est une relation d'équivalence.
2. Montrer que $\sim$ est compatible avec l'addition et la multiplication par un scalaire c'est-à-dire : $\forall x, x', y, y' \in V, \forall \lambda \in \mathbb{K}$, si $x \sim x'$ et $y \sim y'$ alors $x + y \sim x' + y'$ et $\lambda x \sim \lambda x'$.
3. Notons V/U l'ensemble des classes d'équivalence pour la relation $\sim$. Déduire de 2. qu'en définissant les opérations : $\overline{x} + \overline{y} = \overline{x + y}$ et $\lambda \overline{x} = \overline{\lambda x}$ où $\overline{x}$ et $\overline{y}$ désignent les classes de x et $y \in V$, on munit V/U d'une structure d'espace vectoriel.
4. Montrer que si V est de dimension finie alors V/U aussi et $\dim(V/U) = \dim(V) - \dim(U)$. [Indication : considérer l'application linéaire $\pi : V \to V/U, x \mapsto \overline{x}$ où $\overline{x}$ est la classe d'équivalence de x.]

Solution :

1. $x - x = 0 \Rightarrow x \sim x$ ce qui prouve que $\sim$ est réflexive. Si $x \sim y$ alors $x - y \in U$ et par suite $y - x \in U$ donc $y \sim x$, $\sim$ est donc symétrique. $x \sim y$ et $y \sim z \Rightarrow x - z = \underbrace{x - y}_{\in U} + \underbrace{y - z}_{\in U} \in U$ ce qui montre que $\sim$ est transitive.
2. Si $x \sim x'$ et $y \sim y'$ alors $x - x' \in U$ et $y - y' \in U$. Donc $x + y - x' - y' = \underbrace{x - x'}_{\in U} + \underbrace{y - y'}_{\in U} \in U$ et $\lambda x - \lambda x' = \lambda \cdot \left(x - x'\right) \in U$, c'est-à-dire $x + y \sim x' + y'$ et $\lambda x \sim \lambda x'$.
3. Remarquons que grâce à 2. les opérations d'addition et de multiplication par un scalaire sont bien définies. On vérifie immédiatement que V/U est un groupe pour l'addition avec $\overline{0}$ comme élément neutre et $\overline{-x}$ comme opposé de $\overline{x}$. On a $1 \cdot \overline{x} = \overline{1 \cdot x} = \overline{x}$ et le reste des propriétés est évident…
4. La projection canonique $\pi : V \to V/U, x \mapsto \overline{x}$ est linéaire, en effet, $\pi(\lambda x + \mu y) = \overline{\lambda x + \mu y} = \lambda \overline{x} + \mu \overline{y} = \lambda \pi(x) + \mu \pi(y)$. π est surjective et par le théorème de la dimension, $\dim V = \dim V/U + \dim \ker(\pi)$. Or $\ker(\pi) = U$, donc $\dim V/U = \dim V - \dim U$.

EXERCICE 16.

Niveau : Premier Cycle
Auteur : Ruben Ricchiuto (10.01.05)
Mots Clés : Polynôme caractéristique

Énoncé :

Considérons les applications $a_i : M_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$, $0 \le i \le n-1$ ($M_n(\mathbb{C})$ est l'ensemble des matrices $n \times n$ à coefficients dans $\mathbb{C}$) où $a_i(A)$ est le coefficient de degré *i* du polynôme caractéristique de *A*. Montrer que pour toutes matrices A, B, si *B* est inversible, $a_i(AB) = a_i(BA)$ pour tout $0 \le i \le n-1$.

Solution :

On a $Car_{AB}(X) = \det(AB - XI) = \det(B(AB - XI)B^{-1}) = \det(BA - XI) = Car_{BA}(X)$. Le polynôme caractéristique de AB est le même que celui de BA, par suite $a_i(AB) = a_i(BA)$.

Remarque : on montre plus généralement que $Car_{AB}(X) = Car_{BA}(X)$ pour toutes matrices $A, B \in M_n(\mathbb{C})$.

EXERCICE 17.

Niveau : Premier Cycle
Auteur : Ruben Ricchiuto (10.01.05)
Mots Clés : Formes bilinéaires symétriques

Énoncé :

Soit $\mathbb{K}$ un corps quelconque, V un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{K}$ et $\beta : V \times V \to \mathbb{K}$ une forme bilinéaire symétrique.

1. Montrer que si $\mathbb{K}$ est de caractéristique $\neq 2$ alors il existe une base $\{e_1,..,e_n\}$ de V telle que $\beta(e_i,e_j)=0$ si $i \neq j$. [Indication : procéder par récurrence sur $\dim(V)$. Montrer qu'il existe $x \in V$ tel que $\beta(x,x)\neq 0$ et qu'en notant $\langle x \rangle$ l'espace engendré par x on a $V = \langle x \rangle \oplus \langle x \rangle^{\perp}$ où $\langle x \rangle^{\perp} = \{y \in V \mid \beta(x,y)=0\}$.]
2. Donner un exemple qui prouve qu'en caractéristique deux l'affirmation de 1. est fausse.
3. On définit le sous-espace $H = \{x \in V \mid \forall y \in V, \beta(x,y)=0\}$. On dit que β est non dégénérée si $(\forall y \in V, \beta(x,y)=0) \Rightarrow x=0$. Montrer que β est non dégénérée $\Leftrightarrow H=\{0\}$.
4. On suppose $\mathbb{K}$ de caractéristique $\neq 2$. Soit $\{e_1,..,e_n\}$ une base de V telle que $\beta(e_i,e_j)=0$ si $i \neq j$. Soit r le cardinal de l'ensemble $E = \{i \in \{1,...,n\} \mid \beta(e_i,e_i)=0\}$. Montrer que l'ensemble $\{e_j \mid j \in E\}$ engendre H et que par conséquent $\dim(H)=r$.
5. Si $V=\mathbb{K}^n$, montrer que la forme bilinéaire symétrique définie par $\forall x,y \in \mathbb{K}^n, \langle x | y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ est non dégénérée.
6. Avec les mêmes notations que dans 5, on considère de plus la matrice définie par $A=(a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$, $a_{ij}=\beta(e_i,e_j)$ où $\{e_1,..,e_n\}$ est la base canonique de $\mathbb{K}^n$. Montrer que $\beta(x,y)=\langle x | Ay \rangle$. En déduire que $H=\ker(A)$ et que par suite β est non dégénérée ssi $\det(A)\neq 0$.
7. Déterminer la dimension de H dans le cas où $\beta : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ est définie par $\beta\big((x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)\big) = x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_3$.

Solution :

1. Si $\beta = 0$ il n'y a rien à montrer, supposons donc $\beta \neq 0$. Démontrons l'affirmation par récurrence sur $n=\dim(V)$. Si $n=1$ il n'y a rien à montrer. Supposons l'affirmation vérifiée pour $n \geq 1$. Soit V un espace vectoriel de dimension $n+1$. Il existe un élément $x \in V$ tel que $\beta(x,x)\neq 0$ car sinon pour tout $x,y \in V, 0=\beta(x+y,x+y)=2\beta(x,y)$ et par conséquent $\beta = 0$ (c'est ici qu'on utilise le fait que $\mathbb{K}$ n'est pas de caractéristique 2). Soit donc x un tel élément. Considérons la forme linéaire $f : V \to \mathbb{K}$ définie par

$f(y) = \beta(x, y)$. $\ker(f) = \left\{ y \in V \mid \beta(x, y) = 0 \right\}$ est de dimension $n = \dim(V) - 1$. De plus $x \notin \ker(f)$, par suite $V = \langle x \rangle \oplus \ker(f)$. Par hypothèse de récurrence il existe une base $x_1, .., x_n$ de $\ker(f)$ avec $\beta(x_i, x_j) = 0$ si $i \neq j$. $x, x_1, .., x_n$ est donc la base cherchée.

2. Soit $V = \mathbb{F}_2^2$ l'espace vectoriel de dimension deux sur le corps $\mathbb{F}_2$. Soit e_1, e_2 les vecteurs de la base canonique. On définit β de la manière suivante : $\beta(e_1, e_1) = \beta(e_2, e_2) = 0, \beta(e_1, e_2) = \beta(e_2, e_1) = 1$. $V = \left\{ 0, e_1, e_2, e_1 + e_2 \right\}$ et on voit facilement qu'il n'existe pas de base comme dans 1.
3. Supposons β non dégénérée et soit $x \in H$ alors pour tout $y \in V, \beta(x, y) = 0$ et par suite $x = 0$. Réciproquement si $H = \{0\}$ supposons que pour tout $y \in V, \beta(x, y) = 0$ alors $x \in H$ et donc $x = 0$.
4. Notant $\left\langle \left\{ e_j \mid j \in E \right\} \right\rangle$ l'espace engendré par $\left\{ e_j \mid j \in E \right\}$ il est facile de voir que $\left\langle \left\{ e_j \mid j \in E \right\} \right\rangle \subseteq H$. Réciproquement, soit $x \in H$. $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$ et $0 = \beta(x, e_j) = \beta(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i, e_j) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \beta(e_i, e_j) = \lambda_j \beta(e_j, e_j)$. Ainsi pour $j \notin E$, $\beta(e_j, e_j) \neq 0$ et donc $\lambda_j = 0$ par suite x est combinaison linéaire d'éléments de $\left\{ e_j \mid j \in E \right\}$. On en déduit immédiatement $\dim(H) = r$.
5. Supposons que $x \in \mathbb{K}^n$ vérifie : $\forall y \in \mathbb{K}^n, \langle x | y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = 0$. Dans ce cas en prenant pour y les vecteurs de la base canonique on obtient, $x_1 = ... = x_n = 0$ c'est-à-dire $x = 0$.
6. Soit $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i, y = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i$ avec $x_i, y_i \in \mathbb{K}$.
$\beta(x, y) = \beta(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \sum_{j=1}^{n} y_j e_j) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \sum_{j=1}^{n} y_j \beta(e_i, e_j) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot (Ay)_i = \langle x | Ay \rangle$ où $(Ay)_i$ est la i-ème composante du vecteur Ay. $H = \ker(A)$ en effet,
$y \in H \Leftrightarrow \forall z \in \mathbb{K}^n, \beta(z, y) = 0 \Leftrightarrow \forall z \in \mathbb{K}^n, \langle z | Ay \rangle = 0 \Leftrightarrow Ay = 0$. β est non dégénérée ssi $H = \ker(A) = \{0\}$ donc ssi $\det(A) \neq 0$.
7. La matrice associée à β dans la base canonique est $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et cette matrice est visiblement de rang 2 donc $\dim\ker(A) = \dim(H) = 1$.