



EXERCICES D'

ALGÈBRE

EXERCICE 1.

Niveau : Deuxième Cycle

Auteur : Ruben Ricchiuto (27.04.05, ruben@sciences.ch)

Mots Clés : Sous-groupes de Sylow, normalisateur

Énoncé :

Soit G un groupe fini et P, H deux p -sous-groupes de Sylow de G .

E1 : Montrer que si N est un sous-groupe tel que $P \subset N$ et P normal (ou distingué, c'est pareil) dans N alors $H \subset N$ implique $P = H$.

E2 : Notons $N(P)$ (resp. $N(H)$) le normalisateur de P (resp. H). Montrer que $N(P) = N(H) \Rightarrow P = H$.

E3 : Montrer que $N(N(P)) = N(P)$.

Solution :

S1 : Il est évident que P et H sont des sous-groupes de Sylow de N . De plus, tous les sous-groupes de Sylow sont conjugués. Il existe donc $g \in N$ tel que $gPg^{-1} = H$. Mais $gPg^{-1} = P$ car P est normal dans N .

S2 : Si $N(P) = N(H)$ alors par 1. $N = H$ car $P, H \subset N(P)$ et P est normal dans $N(P)$.

S3 : $N(N(P)) = \{g \in G \mid gN(P)g^{-1} = N(P)\}$. Soit $g \in N(N(P))$, alors gPg^{-1} est un sous-groupe de Sylow de $gN(P)g^{-1} = N(P)$. Toujours par 1. on conclut que $gPg^{-1} = P$, c'est-à-dire $g \in N(P)$. Ainsi $N(N(P)) = N(P)$.

EXERCICE 2.

Niveau : Deuxième Cycle

Auteur : Ruben Ricchiuto (27.04.05, ruben@sciences.ch)

Mots Clés : Groupes résolubles

Énoncé :

Une suite de groupes $G_0 \supset G_1 \supset \dots \supset G_n$ est une *suite de composition* de G_0 vers G_n (suite de composition tout court si $G_n = \{1\}$) si G_{i+1} est normal dans G_i . On dit qu'une telle suite est abélienne (resp. cyclique) si en plus G_i / G_{i+1} est abélien (resp. cyclique).

E1 : Soit $\varphi: G \rightarrow F$ un homomorphisme et $F = F_0 \supset \dots \supset F_n$ une suite de composition. Montrer que si cette suite est abélienne respectivement cyclique alors la suite $\varphi^{-1}(F_0) \supset \dots \supset \varphi^{-1}(F_n)$ est abélienne respectivement cyclique. Montrer de même que si $G = G_0 \supset \dots \supset G_n$ est une suite de composition abélienne (resp. cyclique), la suite $\varphi(G_0) \supset \dots \supset \varphi(G_n)$ est abélienne (resp. cyclique).

E2 : On dit qu'un groupe G est *résoluble* s'il existe une suite de composition abélienne $G = G_0 \supset G_1 \supset \dots \supset \{1\}$. Soit $\{1\} \rightarrow H \xrightarrow{\varphi} G \xrightarrow{\psi} F \rightarrow \{1\}$ une suite exacte de groupes. Montrer que H, F résolubles $\Leftrightarrow G$ résoluble.

E3 : Soit G un p -groupe, c'est-à-dire $|G| = p^n$ avec p premier. Montrer à l'aide de 2. que G est résoluble. [Rappel : le centre $\{g \in G \mid \forall x \in G, gx = xg\}$ d'un p -groupe est un groupe non trivial.]

Solution :

S1 : Notons $G_j = \varphi^{-1}(F_j)$ pour $j = 0..n$. Nous avons les homomorphismes

$G_j \xrightarrow{\varphi \circ i} F_j \xrightarrow{\pi} F_j / F_{j+1}$ où $i: G_j \rightarrow G$ est l'injection naturelle. Or

$\ker(\pi \circ \varphi \circ i) = (\varphi \circ i)^{-1}(F_{j+1}) = G_{j+1}$ par suite, $\pi \circ \varphi \circ i$ se factorise en $\pi \circ \varphi \circ i = \phi \circ \pi_G$ où $\phi: G_j / G_{j+1} \rightarrow F_j / F_{j+1}$ est injectif et $\pi_G: G_j \rightarrow G_j / G_{j+1}$ est la projection canonique. Par conséquent G_j / G_{j+1} est isomorphe à un sous-groupe de F_j / F_{j+1} , donc si F_j / F_{j+1} est abélien (resp. cyclique), G_j / G_{j+1} est abélien (resp. cyclique). Soit à présent

$G = G_0 \supset \dots \supset G_n$ une suite de composition. Notons $F_j = \varphi(G_j)$. On vérifie facilement que F_{j+1} est normal dans F_j . Considérons l'homomorphisme

$\chi: G_j / G_{j+1} \rightarrow F_j / F_{j+1}, xG_{j+1} \mapsto \varphi(x)F_{j+1}$. χ est bien défini et est surjectif. Ainsi, F_j / F_{j+1} est isomorphe à un quotient de G_j / G_{j+1} ce qui entraîne que F_j / F_{j+1} est abélien (resp. cyclique) si G_j / G_{j+1} est abélien (resp. cyclique).

S2 : Soit $\{1\} \rightarrow H \xrightarrow{\varphi} G \xrightarrow{\psi} F \rightarrow \{1\}$ une suite exacte et soit $F = F_0 \supset \dots \supset F_{n-1} \supset \{1\}$ et $H = H_0 \supset \dots \supset H_{m-1} \supset \{1\}$ deux suites de composition abéliennes. Le morphisme surjectif $\psi : G \rightarrow F$ nous donne la suite de composition abélienne,

$G = \psi^{-1}(F) \supset \psi^{-1}(F_1) \supset \dots \supset \psi^{-1}(F_{n-1}) \supset \ker \psi$. Le morphisme φ nous donne la suite abélienne, $\ker \psi = \varphi(H) \supset \dots \supset \varphi(H_{m-1}) \supset \{1\}$. Pour finir,

$G = \psi^{-1}(F) \supset \psi^{-1}(F_1) \supset \dots \supset \psi^{-1}(F_{n-1}) \supset \ker \psi \supset \varphi(H_1) \dots \supset \varphi(H_{m-1}) \supset \{1\}$ est une suite abélienne et G est résoluble. Supposons à présent que G est résoluble et soit

$G = G_0 \supset \dots \supset G_{n-1} \supset \{1\}$ une suite abélienne. La suite

$H = \varphi^{-1}(G_0) \supset \varphi^{-1}(G_1) \supset \dots \supset \varphi^{-1}(G_{n-1}) \supset \{1\}$ est une suite de composition abélienne. Donc H est résoluble. La suite $F = \psi(G_0) \supset \dots \supset \psi(G_{n-1}) \supset \{1\}$ est aussi abélienne et par suite F est résoluble.

S3 : Soit G un p -groupe, $|G| = p^n$. Nous savons que le centre Z de G est non trivial et qu'il est normal. Nous avons la suite exacte, $\{1\} \rightarrow Z \xrightarrow{i} G \xrightarrow{\pi} G/Z \rightarrow \{1\}$ où i est l'injection naturelle et π la projection canonique. Nous pouvons donc utiliser une récurrence. Supposons que tout groupe d'ordre p^k avec $k \leq n-1$ soit résoluble. Par hypothèse de récurrence, Z et G/Z sont résolubles et par 2, G l'est aussi. De plus il est clair qu'un groupe d'ordre p est résoluble car cyclique donc abélien.

EXERCICE 3.*Niveau* : Deuxième Cycle*Auteur* : Ruben Ricchiuto (27.04.05, ruben@sciences.ch)*Mots Clés* : Sous-groupes normaux, opération de groupes**Partie I****Énoncé :**

Soit G un groupe fini et H un sous-groupe tel que $[G : H] = p$ avec p le plus petit nombre premier divisant $|G|$. Montrer que H est normal (= distingué) dans G .

[Indication : considérer l'opération de G sur ses sous-groupes par conjugaison, plus particulièrement considérer l'opération de G sur l'orbite de H . Remarquer que cette orbite possède p éléments et que nous obtenons ainsi un homomorphisme φ de G dans S_p le groupe symétrique sur p éléments. Dédurre que $\ker \varphi \subset H$ mais $\ker \varphi \neq H$ et que $[H : \ker \varphi]$ divise $(p-1)!$.]

Solution :

Soit $N(H)$ le normalisateur de H . Supposons H pas normal de sorte que $N(H) \neq G$. Dans ce cas $N(H) = H$ car $[G : H] = p = [G : N(H)] \cdot [N(H) : H]$ et par suite $[N(H) : H] = 1$.

Considérons l'opération de G sur l'ensemble des sous-groupes définie par

$\forall g \in G, \forall K \leq G, g \cdot K = gKg^{-1}$. On voit facilement que le stabilisateur de H est $N(H)$.

L'orbite de H pour cette opération contient donc $[G : N(H)] = [G : H] = p$ éléments.

L'opération de G sur l'orbite de H induit un homomorphisme de G dans le groupe symétrique sur p éléments $\varphi : G \rightarrow S_p$. $\ker \varphi$ est l'intersection des stabilisateurs et donc $\ker \varphi \subset H$.

$\ker \varphi \neq H$, autrement H est normal. $G/\ker \varphi$ est isomorphe à un sous groupe de S_p par

conséquent, $|G/\ker \varphi|$ divise $|S_p| = p!$. Or, $|G/\ker \varphi| = [G : H] \cdot [H : \ker \varphi] = p \cdot [H : \ker \varphi]$

donc $[H : \ker \varphi]$ divise $(p-1)!$. Soit q un diviseur premier de $[H : \ker \varphi]$. Alors q est un diviseur commun de $|H|$ et de $(p-1)!$ et donc un diviseur commun de $|G|$ et de $(p-1)!$.

Donc, $q < p$ et q divise $|G|$ ce qui contredit la minimalité de p . Donc H est normal dans G .

EXERCICE 4.*Niveau* : Deuxième Cycle*Auteur* : Ruben Ricchiuto (27.04.05, ruben@sciences.ch)*Mots Clés* : Sous-groupes de Sylow**Partie II****Énoncé :**

E1 : Soit G un groupe fini et p un nombre premier divisant $|G|$. Notons $n(p)$ le nombre de p -sous-groupes de Sylow et n la plus grande puissance de p divisant $|G|$. Montrer que $n(p)$ divise $|G|/p^n$. [Indication : considérer l'action par conjugaison de G sur l'ensemble des p -sous-groupes de Sylow.]

E2 : Soit G un groupe fini d'ordre $2pq$ avec $2 < p < q$ et p, q premiers. Montrer qu'il existe un sous-groupe de Sylow normal. [Rappel : le nombre de p -Sylow d'un groupe G avec $p \mid |G|$ est congru à 1 (mod p).]

Solution :

S1 : G opère par conjugaison sur l'ensemble des p -sous-groupes de Sylow. Nous savons que cette opération est transitive car deux p -Sylow sont toujours conjugués. Soit P un p -Sylow. Le stabilisateur de P pour cette opération n'est rien d'autre que son normalisateur $N(P)$.

Ainsi, $n(p) = [G : N(P)]$ et donc $n(p) \cdot \underbrace{\frac{|N(P)|}{p^n}}_{\in \mathbb{N}} = \frac{|G|}{p^n}$.

S2 : Soient $n(p)$ et $n(q)$ le nombre de p -Sylow et de q -Sylow respectivement. $n(p) \mid 2q$ et $n(q) \mid 2p$. Supposons $n(p)$ et $n(q) > 1$. $n(q) = 2, p$ ou $2p$ mais $n(q) \equiv 1 \pmod{q}$ et donc $n(q) = 2p$. $2p > q$ car $2p \equiv 1 \pmod{q}$. La division euclidienne de $2p$ par q donne donc $2p = q + 1$. En particulier, $q \equiv -1 \pmod{p}$. $n(p) = 2, q$ ou $2q$ mais $n(p) \equiv 1 \pmod{p}$ et $q \equiv -1 \pmod{p}$ donc $n(p) = 2q$. Sachant que l'intersection de deux Sylow distincts est $\{1\}$ car $2, p$ et q sont premiers, le nombre d'éléments appartenant à un p -Sylow ou à un q -Sylow est donné par $2p(q-1) + 2q(p-1) + 1 = 2pq + 2 \underbrace{(q(p-1) - p)}_{>0} + 1 > |G|$, absurde. Donc $n(p) = 1$

ou $n(q) = 1$.

EXERCICE 5.

Niveau : Deuxième Cycle

Auteur : Ruben Ricchiuto (27.04.05, ruben@sciences.ch)

Mots Clés : Sous-groupes de Sylow

Partie III**Énoncé :**

Soit G un groupe fini d'ordre p^2q avec p et q premiers distincts. Montrer qu'il existe un sous-groupe de Sylow normal dans G .

Solution :

Si $q < p$ c'est fini car dans ce cas, si P est un p -Sylow alors par la partie I, P est normal. Nous supposons donc que $q > p$ et qu'il n'existe aucun q -Sylow normal. Soit $n(q)$ le nombre de q -Sylow. Nous savons que $n(q)$ divise p^2 . Par suite, $n(q) = p, p^2$ ($n(q) \neq 1$ car autrement l'unique q -Sylow serait normal). $n(q) = p$ est impossible car $n(q) \equiv 1 \pmod{q}$. Donc $n(q) = p^2$. Remarquons que si Q_1, Q_2 sont deux q -Sylow distincts alors $|Q_1 \cap Q_2|$ divise q et donc $Q_1 \cap Q_2 = \{1\}$. Ceci entraîne que si Q_1, \dots, Q_{p^2} sont les q -Sylow alors

$\left| \bigcup_i Q_i \right| = p^2(q-1) + 1 = p^2q - p^2 + 1$. Soit $A = G \setminus \bigcup_i (Q_i \setminus \{1\})$. Si P est un p -Sylow alors

$P \subset A$. Or $|A| = p^2 = |P|$ et donc $A = P$. Il n'existe donc qu'un seul p -Sylow, il est par conséquent normal.

EXERCICE 6.*Niveau* : Deuxième Cycle*Auteur* : Ruben Ricchiuto (27.04.05, ruben@sciences.ch)*Mots Clés* : Groupes simples et résolubles d'ordre < 60 **Partie IV****Énoncé :**

Nous donnons les résultats suivants utiles pour la question 1. Soit G un groupe fini. Si $|G| = p^2$ avec p premier alors G est abélien. Si $|G| = p^n$ avec p premier (on dit que G est un p -groupe) alors le centre de G est non trivial.

E1 : Montrer qu'il n'existe aucun groupe simple non abélien d'ordre < 60 .

E2 : Dédire de 1. que tout groupe G d'ordre < 60 est résoluble.

Solution :

S1 : Les groupes d'ordre **1,2,3,4,5,7,9,11,13,17,19,23,25,29,31,37,41,43,47,49,53,59** sont tous abéliens car d'ordres p ou p^2 avec p premier (sauf $\{1\}$).

Supposons $|G| = p \cdot q$ avec $p < q$ premiers. Soit $H \leq G$ un q -Sylow alors H est normal (cf. partie I). Par suite, les groupes d'ordre **6,10,14,15,21,22,26,33,34,35,38,39,46,51,55,57,58** ne sont pas simples.

Si $|G| = 2 \cdot p \cdot q$ avec $2 < p < q$ et p, q premiers alors par la partie II il existe un sous-groupe de Sylow normal. Donc, les groupes d'ordre **30,42** ne sont pas simples.

Si $|G| = p^2 \cdot q$ avec p, q premiers nous avons vu (cf. partie III) qu'il existe un sous-groupe de Sylow normal. Par suite, les groupes d'ordre **12,18,20,28,44,45,50,52** ne sont pas simples.

Soit G un p -groupe d'ordre p^n avec $n > 1$. Si G est abélien alors il n'est pas simple car il existe un sous-groupe d'ordre p (qui est par conséquent normal). Si G n'est pas abélien alors son centre est normal non trivial et différent de G . Par conséquent, les groupes d'ordre **8,16,27,32** ne sont pas simples.

Un groupe d'ordre **24** n'est pas simple. En effet $n(2) = 1, 3$ (où $n(2)$ est le nombre de 2-Sylow). Si $n(2) = 1$ alors il n'existe qu'un seul 2-Sylow et par conséquent il est normal. Si $n(2) = 3$ alors l'action de G par conjugaison sur l'ensemble des 2-Sylow induit un homomorphisme $\varphi: G \rightarrow S_3$ (où S_3 est le groupe symétrique sur trois éléments). Il est évident que $\ker \varphi \neq \{1\}$ car $|G| = 24$ et $|S_3| = 6$. De plus, $\ker \varphi \neq G$ car autrement tous les 2-Sylow seraient normaux ce qui est absurde. $\ker \varphi$ est donc un sous-groupe normal non trivial et différent de G .

Un groupe d'ordre **36** n'est pas simple. En effet, $n(3) = 1, 4$ et si $n(3) = 4$ alors par le même argument que ci-dessus, il existe un homomorphisme $\varphi: G \rightarrow S_4$ et il est évident que $\ker \varphi \neq \{1\}, G$.

Un groupe d'ordre **40** n'est pas simple car $n(5) = 1$.

Un groupe d'ordre **48** n'est pas simple. En effet, $n(2) = 1, 3$ et si $n(2) = 3$ alors toujours par le même argument déjà utilisé, il existe un homomorphisme $\varphi: G \rightarrow S_3$ et il est évident que $\ker \varphi \neq \{1\}, G$.

Un groupe d'ordre **54** n'est pas simple car $n(3) = 1$.

Un groupe d'ordre **56** n'est pas simple. En effet, $56 = 2^3 \cdot 7$ et $n(7) = 1, 8$. Supposons $n(7) = 8$. Alors le nombre d'éléments appartenant à un 7-Sylow excepté 1 est de $6 \cdot 8 = 48$ (deux 7-Sylow distincts ont une intersection triviale). Or $56 - 48 = 8$ ce qui laisse la place à un unique 2-Sylow qui est par conséquent normal.

Remarque : on démontre que le groupe alterné $A_5 \subset S_5$ (c'est le groupe des permutations de signature 1) ($|A_5| = 60$) est simple.

S2 : Par récurrence sur $n = |G|$. Si $n = 1$ il n'y a rien à démontrer. Supposons la proposition vérifiée pour tout groupe d'ordre $\leq n < 59$. Soit G un groupe d'ordre $n + 1$. Si G est abélien alors il est résoluble, nous supposons donc G non abélien. Par 1. G n'est pas simple. Soit $\{1\} \neq H < G$ normal, alors G/H est résoluble par hypothèse de récurrence et la projection canonique $\pi: G \rightarrow G/H$ induit une suite de composition abélienne

$G_d = G \supset G_{d-1} \supset \dots \supset G_0 = H$. Toujours par hypothèse de récurrence, H est résoluble. Soit $H_m = H \supset H_{m-1} \supset \dots \supset H_0 = \{1\}$ une suite de composition abélienne, alors

$G_d = G \supset G_{d-1} \supset \dots \supset G_0 \supset H_{m-1} \supset \dots \supset H_0 = \{1\}$ est une suite de composition abélienne et par conséquent G est résoluble.

Remarque : le groupe alterné $A_5 \subset S_5$ ($|A_5| = 60$) n'est pas résoluble (car il est simple).

EXERCICE 7.

Niveau : Deuxième Cycle

Auteur : Ruben Ricchiuto (27.04.05, ruben@sciences.ch)

Mots Clés : Groupes, groupes normaux, groupes cycliques, sous-groupes de Sylow

Énoncé :

E1 : Soit G un groupe fini et H, N deux sous-groupes normaux tels que $|H|, |N|$ sont premiers entre eux et $G = H \cdot N$ (où $H \cdot N$ est le sous-groupe engendré par H et N). Montrer que $G \simeq H \times N$.

E2 : Soit G un groupe d'ordre pq avec p, q premiers, $p < q$ et $q \not\equiv 1 \pmod{p}$. Montrer que G est cyclique. En déduire que tout groupe d'ordre 15 ou 35 est cyclique.

[Indication : raisonner avec les sous-groupes de Sylow et utiliser 1.]

Solution :

S1 : Remarquons que $H \cap N = \{1\}$ car $|H \cap N|$ est un diviseur commun de $|H|$ et $|N|$. Soit $h \in H$ et $n \in N$. On a $hnh^{-1} = m \in N$, donc $\underbrace{n^{-1}hnh^{-1}}_{\in H} = n^{-1}m$. Ainsi $n^{-1}m \in H \cap N = \{1\}$ et

par conséquent, $m = n$ ce qui prouve que $hn = nh$. Considérons l'application

$\varphi : H \times N \rightarrow G, (h, n) \mapsto h \cdot n$. φ est un homomorphisme car

$\varphi((h, n) \cdot (h', n')) = \varphi((hh', nn')) = hh'nn' = hnh'n' = \varphi((h, n)) \cdot \varphi((h', n'))$. φ est surjective car le fait que les éléments de H et N commutent entre eux implique que tout $g \in G$ est de la

forme hn avec $(h, n) \in H \times N$. $(h, n) \in \ker \varphi \Leftrightarrow hn = 1 \Leftrightarrow h = n^{-1} \Rightarrow h$ et $n \in H \cap N$ et donc $h = n = 1$, c'est-à-dire $\ker \varphi = \{(1, 1)\}$. φ est donc un isomorphisme.

S2 : Soit P un p -Sylow de G . Soit $n(p)$ le nombre de p -Sylow. Nous savons que $n(p) \equiv 1 \pmod{p}$ et $n(p) \mid q$. Donc $n(p) = 1$ et P est normal. Soit Q un q -Sylow. Par le même raisonnement que précédemment, on déduit que Q est l'unique q -Sylow et que par conséquent il est normal. Étant donné que $|Q|$ et $|P|$ sont premiers entre eux et que $G = P \cdot Q$, par 1. on a $G \simeq P \times Q \simeq \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/q\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}/pq\mathbb{Z}$. Vu que $15 = 3 \cdot 5$ et $35 = 5 \cdot 7$ il résulte de ce qu'on viens de dire que tout groupe d'ordre 15 ou 35 est cyclique.

EXERCICE 8.

Niveau : Deuxième Cycle

Auteur : Ruben Ricchiuto (27.04.05, ruben@sciences.ch)

Mots Clés: Groupes simples, A_5

Énoncé :

Soit S_n le groupe symétrique (le groupe des bijections de l'ensemble $\{1, \dots, n\}$). Soit $\varepsilon : S_n \rightarrow \{-1, 1\}$ la signature. Notons A_n le groupe alterné ($A_n = \ker \varepsilon$). Nous supposons connu le fait que A_5 est un groupe simple. Le but de cet exercice est de montrer qu'en fait A_5 est l'unique groupe simple à 60 éléments, à isomorphisme près.

E1 : Montrer que si $F \leq S_n$ est un sous-groupe d'indice 2, c'est-à-dire $[S_n : F] = 2$ alors $F = A_n$. [Rappel : un groupe d'indice deux est normal.]

E2 : Soit $n \geq 3$ et $H \leq A_n$ un sous-groupe d'indice n . Montrer que l'opération $A_n \times A_n / H \rightarrow A_n / H, (a, bH) \mapsto abH$ de A_n sur les classes modulo H induit un homomorphisme injectif $\varphi : A_n \rightarrow \text{Perm}(A_n / H)$ où $\text{Perm}(A_n / H)$ est le groupe des permutations de A_n / H et que $\varphi(A_n) = \text{Alt}(A_n / H)$ où $\text{Alt}(A_n / H)$ est le groupe alterné des permutations de A_n / H .

E3 : Avec les mêmes notations que précédemment, montrer qu'il existe un automorphisme de A_n qui envoie H sur H_1 où H_1 est le sous-groupe de A_n qui laisse fixe 1 ($H_1 \simeq A_{n-1}$). En déduire que les sous-groupes de A_n d'indice n sont tous isomorphes.

E4 : Soit à présent G un groupe simple d'ordre 60. Montrer que l'opération de G par conjugaison sur les 5-Sylow induit un homomorphisme injectif $\varphi : G \rightarrow A_6$. En déduire que $G \simeq A_5$.

Solution :

S1 : Soit F comme dans l'énoncé. F est normal car d'indice deux. Considérons la projection canonique $\pi : S_n \rightarrow S_n / F$ et notons $S_n / F = \{F, \alpha F\}$ où α est une permutation n'appartenant pas à F . Il existe au moins une transposition τ n'appartenant pas à F car autrement $S_n = F$ (car S_n est engendré par les transpositions). Vu que toutes les transpositions sont conjuguées à τ , aucune d'entre elles n'appartient à F . Soit $\sigma \in A_n$, alors σ est un produit pair de transpositions et par suite $\pi(\sigma) = F$, c'est-à-dire $\sigma \in F$. Donc $A_n \subset F$. Vu que $|A_n| = |F|$ on a, $A_n = F$.

S2 : L'opération $A_n \times A_n / H \rightarrow A_n / H, (\sigma, \gamma H) \mapsto \sigma \gamma H$ de A_n sur les classes modulo H induit l'homomorphisme $\varphi : A_n \rightarrow \text{Perm}(A_n / H)$ défini par $\varphi(\sigma)(\gamma H) = \sigma \gamma H$. Remarquons que $\ker \varphi \neq A_n$ car pour $\sigma \in A_n \setminus H$, $\varphi(\sigma)(H) = \sigma H \neq H$. Pour $n \geq 5$, A_n est simple et par suite, $\ker \varphi = \{1\}$. Si $n = 3$ alors $|A_3| = 3$ et donc $\ker \varphi = \{1\}$. Si $n = 4$, $|A_4| = 12$ et donc $|H| = 3$, vu

que $\ker \varphi \subset H$, si $\ker \varphi \neq \{1\}$ on a forcément $\ker \varphi = H$ mais on vérifie facilement que les sous-groupes de A_4 d'ordre 3 ne sont pas normaux. Donc dans tous les cas $\ker \varphi = \{1\}$ et φ est injective. $|A_n/H| = n$, par conséquent $\text{Perm}(A_n/H) \simeq S_n$. $\varphi(A_n)$ est donc un sous-groupe d'indice 2 dans $\text{Perm}(A_n/H)$ et par 1. $\varphi(A_n) = \text{Alt}(A_n/H)$.

S3 : Considérons à nouveau l'injection $\varphi: A_n \rightarrow \text{Perm}(A_n/H)$. Pour tout $h \in H$, $\varphi(h)$ fixe H . En effet $\varphi(h)(H) = hH = H$. Soit $\{a_1, \dots, a_n\}$ un système de représentants pour les classes modulo H avec $a_1 = 1$ et considérons la bijection $\phi: A_n/H \rightarrow \{1, \dots, n\}, a_i H \mapsto i$. ϕ induit l'isomorphisme $\chi: \text{Perm}(A_n/H) \rightarrow S_n, \sigma \mapsto \phi \circ \sigma \circ \phi^{-1}$. $\chi \circ \varphi: A_n \rightarrow S_n$ est une injection, donc par 1, $\chi \circ \varphi(A_n) = A_n$. $\chi \circ \varphi: A_n \rightarrow A_n$ est par conséquent un automorphisme de A_n . De plus si $\alpha \in H$ alors $\chi(\varphi(\alpha))$ fixe 1 car

$\chi(\varphi(\alpha))(1) = (\phi \circ \varphi(\alpha) \circ \phi^{-1})(1) = (\phi \circ \varphi(\alpha))(H) = \phi(H) = 1$. Ainsi, $\chi \circ \varphi(H) = H_1$. $\chi \circ \varphi$ est donc l'automorphisme cherché. En particulier, les sous-groupes d'indice n de A_n sont tous isomorphes.

S4 : $|G| = 60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$. Notons $n(5)$ les 5-Sylow. Nous savons que $n(5) | 12$ et que $n(5) \equiv 1 \pmod{5}$. Par suite, $n(5) = 1, 6$. $n(5) = 1$ est à exclure car autrement le seul 5-Sylow serait normal ce qui est incompatible avec le fait que G est simple. Donc $n(5) = 6$. G opère par conjugaison sur l'ensemble des 5-Sylow et cet ensemble contient 6 éléments. Par conséquent, cette opération induit un homomorphisme $\varphi: G \rightarrow S_6$. G étant simple, $\ker \varphi = \{1\}$ ($\ker \varphi = G$ est impossible car sinon tous les 5-Sylow seraient normaux) et φ est injective. Soit $\varepsilon: S_6 \rightarrow \{-1, 1\}$ la signature. Toujours parce que G est simple, $\ker(\varepsilon \circ \varphi) = \{1\}, G$. $\ker(\varepsilon \circ \varphi) = \{1\}$ est à exclure car autrement G s'injecte dans $\{-1, 1\}$. Donc $\ker(\varepsilon \circ \varphi) = G$ et par conséquent, $\varphi(G) \subset A_6$. Nous avons donc un homomorphisme injectif $\varphi: G \rightarrow A_6$ et $\varphi(G)$ est un sous-groupe d'indice 6 dans A_6 . Par 3, G est donc isomorphe à H_1 où H_1 est le sous-groupe de A_6 qui laisse fixe 1. Mais $H_1 \simeq A_5$, donc $G \simeq A_5$.